1) $(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$ engendre $V$, pour en extraire une base, on échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivots   2 param

nb de pivots

donc $\boxed{\dim V = 3}$   et $\boxed{(v_1, v_2, v_4) \text{ est une base de } V}$

indices des pivots

2) $\underline{(w_1,w_2) \text{ engendre } W}$ (par def de $W$)

et $\underline{(w_1,w_2) \text{ libre}}$ car $w_1$ et $w_2$ non colinéaires

donc $\boxed{(w_1,w_2) \text{ base de } W}$ et $\boxed{\dim W = 2}$

3) $(\underbrace{v_1,v_2,v_4}_{\text{base de } V}, \underbrace{w_1,w_2}_{\text{base de } W})$ engendre $V+W$. Pour en extraire une base, on échelonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4 pivots   1 param

nb de pivots

donc $\boxed{\dim(V+W) = 4}$

et $\boxed{(v_1,v_2,v_4,w_1) \text{ est une base de } V+W}$

4) $\dim(V\cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W) = 3+2-4 = \boxed{1}$

Le système $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_4 \cdot v_4 + \mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2 = 0$

a pour solutions :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\mu_2 \\ \lambda_2 = -3\mu_2 \\ \lambda_4 = -2\mu_2 \\ \mu_1 = -4\mu_2 \\ \mu_2 = 1\mu_2 \end{cases}$$

nb de param

On a donc 1 relation :

$$2v_1 - 3v_2 - 2v_4 - 4w_1 + w_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2v_1 - 3v_2 - 2v_4}_{\in V} = \underbrace{4w_1 - w_2}_{\in W}$$

donc $\boxed{(4w_1 - w_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } V\cap W}$