Remplir vos réponses directement sur le sujet. Merci d'indiquer votre nom. Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Un barème est donné à titre indicatif.

Nom : .... **Prénom :** ....

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3(1-4x)^{10} + \cos\left(\tfrac{x}{\pi}\right) e^{x^2}$$

$$f_1'(x) = -120\,(1-4x)^9 - \frac{1}{\pi}\sin\left(\tfrac{x}{\pi}\right)\mathrm{e}^{x^2} + 2x\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)\mathrm{e}^{x^2}$$

$$f_2(x) = \arctan(\sqrt{1+x^2})$$

$$f_2'(x) = \frac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f_3(x) = \pi\left(2 + e^{\sqrt[3]{x}} - \cos(x)\right)^{\ln(x)} = e^{\ln(x)\times\ln\left(2+e^{\sqrt[3]{x}}-\cos(x)\right)^{\ln(x)}}$$

$$f_3'(x) = \pi\left[\ln(x)\frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}e^{\sqrt[3]{x}}+\sin(x)}{2+e^{\sqrt[3]{x}}-\cos(x)} + \frac{1}{x}\ln\left(2+e^{\sqrt[3]{x}}-\cos(x)\right)\right]\left(2+e^{\sqrt[3]{x}}-\cos(x)\right)^{\ln(x)}$$

$$f_4(x) = x^{x^x} = e^{\ln(x)\,x^x} = e^{\ln(x)\,e^{x\ln(x)}}$$

$$f_4'(x) = \left(\tfrac{1}{x}x^x + \ln(x)(\ln(x)+1)x^x\right)\times x^{x^x} = \left(\ln(x)^2+\ln(x)+\tfrac{1}{x}\right)x^{x+x^x}$$

Indication : On rappelle que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2. Déterminer une équation de la tangente au graphe de $f : x \mapsto \log_2(x^2-1)$ au point d'abscisse 3.

   On a $f'(x) = \frac{1}{\ln(2)}\frac{2x}{x^2-1}$. On calcule alors

$$f(3) = \log_2(8) = 3, \qquad f'(3) = \frac{3}{4\ln(2)}$$

   ce qui donne l'équation de la tangente au point d'abscisse 3 :

$$y = 3 + \frac{3}{4\ln(2)}(x-3)$$

3. **Preuve de la formule** $(uv)' = u'v + uv'$

Dans cet exercice, on se propose de prouver la fameuse formule $(uv)' = u'v + uv'$ de la dérivée d'un produit. Pour cela, on se donne $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle réel et deux fonctions réelles $u, v : I \to \mathbb{R}$ définies sur I. On fixe $a \in I$, et on suppose que u et v sont dérivables en a. On note $uv : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $(uv)(x) = u(x)\,v(x)$ pour $x \in I$.

(a) Montrer que pour tout $x \in I$ avec $x \neq a$, on a

$$\frac{(uv)(x) - (uv)(a)}{x-a} = u(x) \times \frac{v(x) - v(a)}{x-a} + \frac{u(x) - u(a)}{x-a} \times v(a)$$

L'idée pour faire apparaitre les quantités désirées et d'ajouter et soustraire la quantité $u(x)v(a)$. Pour $x \neq a$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(x) - (uv)(a)}{x-a} &= \frac{u(x)v(x) - u(a)v(a)}{x-a} \\
&= \frac{u(x)v(x) - u(x)v(a) + u(x)v(a) - u(a)v(a)}{x-a} \\
&= \frac{u(x)(v(x) - v(a)) + (u(x) - u(a))v(a)}{x-a} \\
&= u(x) \times \frac{v(x) - v(a)}{x-a} + \frac{u(x) - u(a)}{x-a} \times v(a)
\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résulat demandé (NB : une autre façon de procéder aurait été de partir de l'expression de droite, développer, et aboutir après simplification à celle de gauche).

(b) En déduire que la fonction uv est dérivable en a et que

$$(uv)'(a) = u(a)v'(a) + u'(a)v(a)$$

En passant à la limite quand $x \to a$ dans l'expression ci-dessus, on trouve

$$\frac{(uv)(x) - (uv)(a)}{x-a} = u(x) \times \frac{v(x) - v(a)}{x-a} + \frac{u(x) - u(a)}{x-a} \times v(a) \xrightarrow[x \to a]{} u(a) \times v'(a) + u'(a) \times v(a)$$

ce qui entraine uv est dérivable en a et que sa dérivée en a vaut

$$(uv)'(a) = u(a)v'(a) + u'(a)v(a)$$