

Remplir vos réponses directement sur le sujet. Merci d'indiquer votre nom. Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Un barème est donné à titre indicatif.

Nom : Prénom :

1. (2 points) Mettre les expressions suivantes sous la forme $\ln(a)$:

$$\ln(12) - \ln(3) + \ln(7) = \ln(\dots) \qquad 3 \ln\left(\frac{5}{3}\right) + 4 \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right) = \ln(\dots)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 9) = \ln(\dots) \qquad 5 = \ln(\dots)$$

2. (2 points) Si $a > 0$ et $b > 0$, exprimer les quantités suivantes sans faire intervenir d'exposant :

$$\ln(a^b) =$$

$$\ln\left(\ln\left(a^{b^c}\right)\right) =$$

3. (* 2 points) Trouver des entiers relatifs $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \ln(2) + y \ln(5) = \ln(500)$.

$$x = \qquad y =$$

4. (2 points) Mettre les expressions suivantes sous la forme e^a :

$$\pi^\pi = e^{\dots} \qquad \frac{e^a}{e^{\frac{a+b}{2}}} = e^{\dots}$$

$$\frac{\sqrt{e^{-4x^2}}}{\left(e^{-\frac{x}{5}}\right)^{10} e^{-7}} = e^{\dots} \qquad \ln(2) = e^{\dots}$$

5. **(5 points)** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(e^x + e^{-x}) \qquad f'_1(x) =$$

$$f_2(x) = e^{\cos(x)} \qquad f'_2(x) =$$

$$f_3(x) = \ln(\ln(x)) \qquad f'_3(x) =$$

$$f_4(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad f'_4(x) =$$

$$f_5(x) = \ln\left(\frac{2x - 5}{3x + 2}\right) \qquad f'_5(x) =$$

6. **(3 points)** Calculer la valeur des logarithmes suivants arrondis à l'entier inférieur. *On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière inférieure du réel x (aussi appelé x "arrondi à l'entier inférieur"), c'est-à-dire l'unique entier relatif $k_x \in \mathbb{Z}$ tel que $k_x \leq x < k_x + 1$. Par exemple on a $\lfloor 23,45 \rfloor = 23$ et $\lfloor 1,5 \rfloor = 1$ et $\lfloor -45,1 \rfloor = -46$ et $\lfloor n \rfloor = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\lfloor \log_2(8) \rfloor =$$

$$\lfloor \log_3(81) \rfloor =$$

$$\lfloor \log_5(5) \rfloor =$$

$$\lfloor \log_7(3) \rfloor =$$

$$\lfloor \log_{10}(2349242) \rfloor =$$

$$\lfloor \log_2(15) \rfloor =$$

(*) En supposant que la puissance de calcul des microprocesseurs est multipliée par un facteur $\sqrt{2}$ tous les ans (et donc multipliée par 2 tous les 2 ans), dans combien d'années disposera-t-on de processeurs au moins 10 fois plus puissants que les processeurs actuels ? *Indication : On pourra chercher à encadrer 10^2 entre deux puissances successives de 2 pour en déduire un encadrement de $\log_2(10)$ à 1/2 près.*

7. (6 points) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

Dans cet exercice, on considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

(a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Quel est son ensemble de dérivabilité?

(b) Déterminer en justifiant $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(c) Calculer la dérivée de f et tracer son tableau de variation.

(d) Parmi les nombres 315840^{829174} et 829174^{315840} , lequel des deux est le plus grand ?

Indication : si $\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\ln(y)}{y}$, que peut-on dire de x^y et y^x ?