n°4 – Propriétés des fonctions (parité, extrema,...)

Notes du Cours

Parité

Définition : Soit f une fonction définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} f\,:\, I &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

f est dite paire si et seulement si :
a) L'ensemble de définition de f est centré en zéro, $(\forall x \in I, -x \in I)$
b) $f(-x) = f(x)$.
f est dite impaire si et seulement si :
a) L'ensemble de définition de f est centré en zéro, $(\forall x \in I, -x \in I)$
b) $f(-x) = -f(x)$.

Une fonction peut être ni paire ni impaire.

Exemples :
a) $f(x) = x^2$ est paire.
b) $f(x) = x^3$ est impaire.
c) $f(x) = x^2 + x + 1$ est ni paire ni impaire.

Proposition : Soient f et g deux fonctions definies sur $I, I' \subseteq \mathbb{R}$.
a) Si les deux fonctions sont paires (resp. impaires) leur somme et leur différence est une fonction paire (resp. impaire).
b) Si les deux fonctions sont paires ou impaires, leur produit est une fonction paire.

Preuve :
a) Soient f et g deux fonctions de même pairité, (les deux sont paires ou les deux sont impaires) $f(-x) \pm g(-x) = f(x) \pm g(x)$.
b) Soient f et g deux fonctions paires ou impaires, $f(-x)g(-x) = (\pm f(x))(\pm g(x)) = f(x)g(x)$.

Proposition : Toute fonction f définie sur un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$ centré en zéro admet une décomposition unique :

$$f(x) = f_p(x) + f_i(x),$$

où $f_p(x)$ est une fonction paire et $f_i(x)$ est une fonction impaire.

Preuve : Il suffit de déterminer les expressions de $f_p(x)$ et $f_i(x)$

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \\ f_i(x) &= \frac{f(x)-f(-x)}{2}. \end{aligned}$$

Exemple : $f(x) = x^2 + x + 1$ est ni paire ni impaire définie sur $\mathbb{R}$ centré en zéro.

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \frac{f(x)+f(-x)}{2} = x^2+1, \\ f_i(x) &= \frac{f(x)-f(-x)}{2} = x. \end{aligned}$$

Axe et centre de symétrie

Définition : Soit f une fonction definie sur $I \subseteq \mathbb{R}$, C_f sa courbe représentative et $a \in \mathbb{R}$ tel que $(a-x), (a+x) \in I$. Si $f(a-x) = f(a+x)$, alors la droite $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe représentative C_f.

Remarque : Si $a = 0$ et I centré en zéro, on obtient : $f(-x) = f(x)$ qui n'est autre que la condition de parité de la fonction f. On peut conclure que les fonctions paires admettent $x = 0$ comme axe de symétrie.

Définition : Soit f une fonction definie sur $I \subseteq \mathbb{R}$, C_f sa courbe représentative et $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $(a-x), (a+x) \in I$. Si $f(a-x) + f(a+x) = 2b$, alors le point $A(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe representative C_f.

Remarque : Si $a = 0$, $b = 0$ et I centré en zéro, on obtient : $f(-x) = -f(x)$. On conclut que les fonctions impaires admettent $O(0, 0)$ comme centre de symétrie.

Dérivée

Défnition (Taux d'accroissement) : Soit f une fonction définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable au point x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

Théorème : Soit f une fonction dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Preuve : On veut démontrer que f est continue en x_0, c'est à dire

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

On peut toujours écrire

$$f(x) = f(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Ensuite, calculons la limite en x_0 :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \left(f(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \right).$$

Comme f est dérivable, alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est finie. Donc,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = 0.$$

Enfin,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \left(f(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \right) = f(x_0).$$

Ce qui conclut notre preuve.

derivées usuelles :

a) $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$.
b) $f(x) = ax^n + b$, $f'(x) = anx^{n-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
c) $f(x) = cos(x)$, $f'(x) = -sin(x)$.
d) $f(x) = sin(x)$, $f'(x) = cos(x)$.
e) $f(x) = u(x)v(x)$, $f'(x) = u'v + v'u$.
f) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
g) $f(x) = h(g(x))$, $f'(x) = g'(x)h'(g(x))$.

Extremum

Définition : Soit f une fonction definie sur $I \subseteq \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. f admet un extremum en x_0 si les deux conditions suivantes sont satisfaites

a) $f'(x_0) = 0$,
b) La dérivée change de signe en x_0.

Exemple : $f(x) = x^2 + 1$. La dérivée est $f'(x) = 2x$. $f'(x) = 0,\ x = 0$. $f'(x)$ est positive si x est positif et négatif si x est négatif. Alors la courbe représentative C_f admet un extremum en $x_0 = 0$.

Exercices

1. (SF38,39) Déterminer le domaine de définition de ces fonctions et étudier leur parité.

$a)\ f(x) = x^4 + x^2$ $\quad f)\ k(x) = x^4 + 2x^3 + x + 1$

$b)\ g(x) = x^3 + 4x$ $\quad g)\ l(x) = cos(x) - sin(x)$

$c)\ h(x) = \dfrac{xsin(x)}{x^2} + 3x^2cos(x)$ $\quad h)\ m(x) = \dfrac{|x|}{x}$

$d)\ i(x) = \dfrac{|x|}{3} - 4x^2 + cos(x)$ $\quad i)\ n(x) = x^2sin(2x) + xcos(3x)$

$e)\ j(x) = \dfrac{|x - sin(x)|}{x^4 - x^2}$ $\quad j)\ o(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^5 + x^3 + 6x}$

2. (SF22→ 25,39) Identifier le domaine de definition des fonctions suivantes puis calculer leurs dérivées.

$a)\ f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 1$ $\quad f)\ k(x) = tan^2(x^2 + 1)$

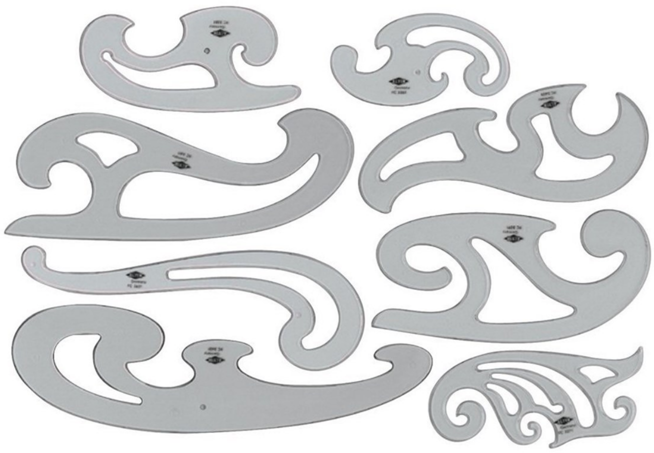
$b)\ g(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$ $\quad g)\ l(x) = Arctan(1 + x^2)$

$c)\ h(x) = x^2cos(x) - sin(x)$ $\quad h)\ m(x) = \sqrt{x^2 + x - 1}$

$d)\ i(x) = cos^4(x)sin(x) - xsin(x)$ $\quad i)\ n(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3}{3x + 1}}$

$e)\ j(x) = cos(sin(x))x^3$ $\quad j)\ o(x) = (cos(sin(x)) + 1)^n, n \in \mathbb{N}$

3. (SF22→25) Expliquer pourquoi la tangente au point le plus bas (resp. plus haut) de ces figures ci-dessous est toujours horizontale. Tourner la figure et remarquer que c'est toujours le cas.



4. (SF22→25) Trouver les coordonnées des extremas des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
&a)\ f(x) = x^2 + x + 1\\
&b)\ g(x) = x^3\\
&c)\ h(x) = cos(x)sin(x)\\
&d)\ i(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x\\
&e)\ j(x) = x^3 + 2x
\end{aligned}$$

5. (SF19→28,37→44) Cet exercice est formé de deux parties **dépendantes**.
Partie A : Soit la fonction suivantes :

$$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x.$$

a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Montrer que $O(0, 0)$ est le centre de symétrie de la courbe représentative C_f.
c) Calculer les limites en $\pm\infty$.
d) Calculer la dérivée de cette fonction.
e) En effectuant le changement de variable $t = x^2$, montrer que la dérivée s'écrit sous la forme suivante :
$$f'(t) = 15t^2 - 30t + 15.$$
f) Etudier le signe de la dérivée et dresser le tableau de variation de f.
g) Tracer la courbe représentative C_f.
h) Trouver l'equation de la tangente à la courbe au point $x_0 = 1$.

Partie B : Soit la fonction
$$F(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{15}{2}x^2.$$

a) Quel est son domaine de définition.
b) Montrer que $F'(x) = f(x)$ puis utiliser les résultats de la partie A pour dresser le tableau de variation de $F(x)$.

6. **Facultatif pour s'amuser** Soient les lettres de l'alphabet A,B,C,D,...,Z. Identifier les axes et centres de symétrie puis conclure que les lettres qui ont en même temps un axe et un centre de symétrie ont en fait deux axes de symétries.