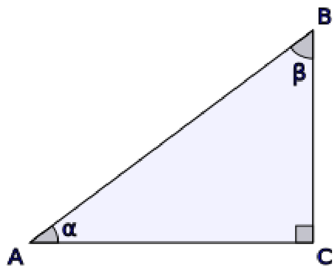
n°3 – Trigonométrie 1

Notes de Cours

Rappels dans un triangle rectangle

On considère un triangle ABC rectangle en C, et l'angle α (aussi noté $\widehat{CAB}$ si on veut péciser le triangle considéré).

Définition
- $\sin(\alpha) = \frac{CB}{AB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$
- $\cos(\alpha) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$
- $\tan(\alpha) = \frac{CB}{AC} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$



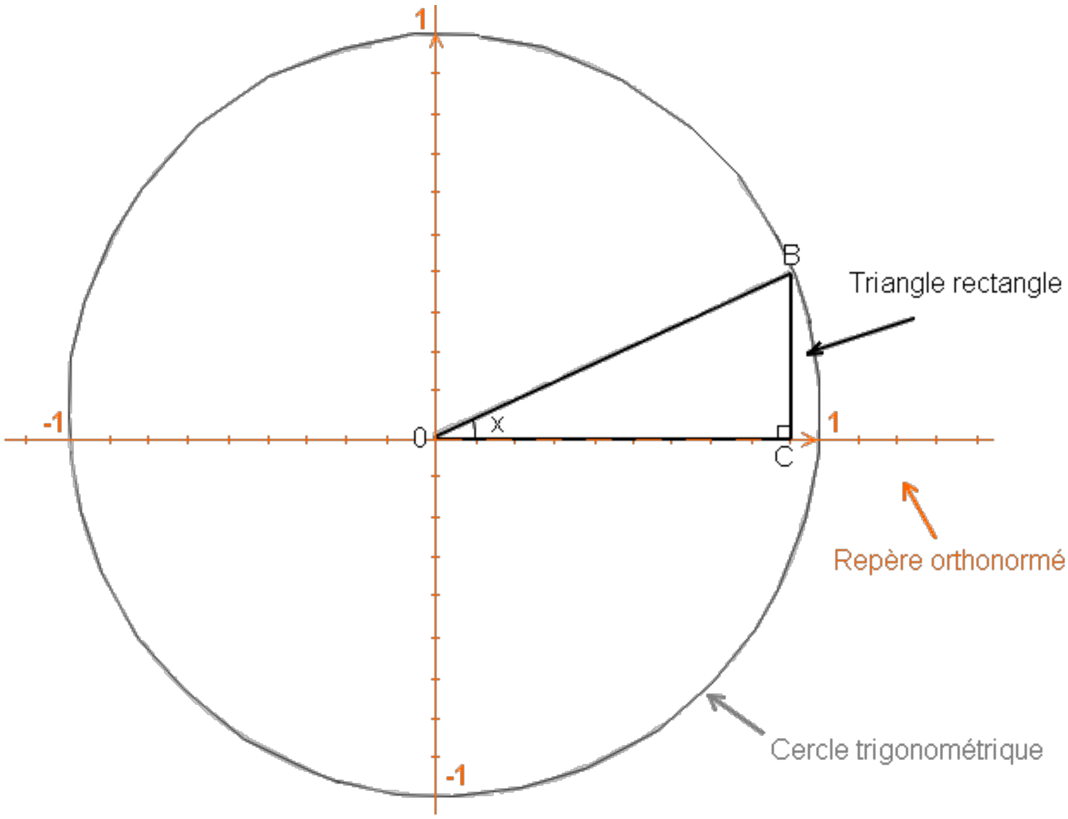
Remarque. $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ sont des valeurs sans unité car ce sont les quotients de 2 longueurs.

Théorème (Pythagore). On considère un triangle ABC rectangle en C. Alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Cercle trigonométrique

On trace un axe horizontal et un axe vertical se croisant en une origine O. On trace le cercle de centre O de rayon 1. Ce cercle est appelé cercle trigonométrique ; le sens trigonométrique est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On place le point 1 de coordonnés (1,0) (c'est-à-dire le point à l'intersection du cercle et de l'axe horizontal, à droite de O). Un point B sur le cercle représente l'angle orienté allant du segment $[O1]$ vers le segment $[OB]$. Le point B est également déterminé par la longueur x de l'arc de cercle allant de 1 à B . Cette longueur est la **mesure en radians** de cet angle.



Degrés et radians

Le périmètre du cercle trigonométrique vaut $2\pi R = 2\pi$ car le rayon est $R = 1$. Ceci équivaut à un tour complet, donc 2π radians = 360 degrés. Ceci conduit au tableau de correspondance suivant entre degrés et radians. Dans la suite, les angles seront toujours en radians, et on ne précisera plus l'unité "radian".

Remarque. Sur un cercle quelconque, la mesure d'un angle en radians est la longueur de l'arc de cercle correspondant à cet angle, divisée par le rayon du cercle. C'est un quotient de longueurs, donc une valeur sans unité. C'est ce qui explique qu'on omet de préciser "radian" quand on parle d'angle.

angle en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
angle en radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π

I Angles(aspect fondamental)

1. (SF46) Trouver une formule générale pour (α en degrés) en fonction de (α en radian).
2. (SF46) Un angle α mesure $\pi/4$ radians ; quelle est sa valeur en degrés ?
3. (SF212) Dessiner l'angle sur un cercle trigonométrique (rayon 1, angle 0 le long de l'axe positif des x). Indiquer sur le même schéma les valeurs de $\sin(\alpha)$ et de $\cos(\alpha)$.
   Quelles sont ces valeurs ?
4. (SF212,SF46) Mêmes questions pour $\alpha = 3\pi/4,\ 5\pi/4,\ 7\pi/4$.

II Les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$(aspect fondamental)

1. (SF46) Dessiner les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ dans l'intervalle $x = [0, 2\pi]$.
2. (SF46) Donner les valeurs de $\sin(\pi/3)$ et de $\cos(\pi/3)$. (Vérifier $\sin^2(\pi/3) + \cos^2(\pi/3) = 1$).
3. (SF46) Quelle valeur Δx faut-il ajouter afin que $\sin(x + \Delta x)$ coincide avec $\cos(x)$?
4. (SF46) Quelles sont les relations entre $\sin(x)$ et $\sin(x \pm \pi)$, et entre $\cos(x)$ et $\cos(x \pm \pi)$?
5. (SF47) Dessiner la fonction $\sin^2(x)$ dans l'intervalle $x = [0, 2\pi]$.
   Comment peut-on vérifier graphiquement la relation $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$?
6. (SF46) Quelle est la période de la fonction $\sin(kx)$ (k est une constante) ?

III La fonction $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$

1. (SF46) Lesquelles des fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ sont paires/impaires par rapport à $x \to -x$?
2. (SF46) Dessiner la fonction $\tan(x)$ dans l'intervalle $x = [0, 2\pi]$.
   Identifier l'origine des singularités et les signes à droite et à gauche des singularités.
3. (SF46) Donner la valeur de $\tan(-\pi/4)$.
4. (SF46) Exprimer $\tan(\pi/2 - \alpha)$ en fonction de $\tan(\alpha)$.