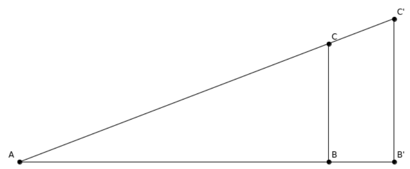
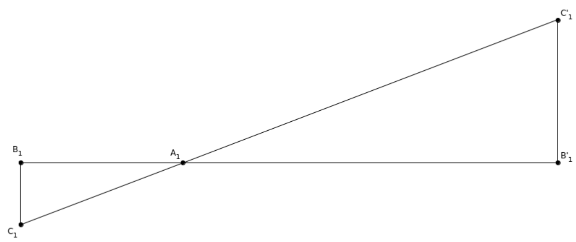
n°2' – Théorème de Thalès, produit scalaire, norme, relation de Chasles

Notes de Cours

Théorème de Thalès

Le théorème de Thalès utilise les propriétés des triangles semblables pour déterminer la longueur d'un côté d'un triangle sachant les longueurs des autres côtés. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dit "semblables" si ils ont la même forme (les mêmes angles) mais pas forcément la même taille. Dans ce cas, on a $AB = xA'B'$, $BC = xB'C'$ et $AC = xA'C'$ avec x un réel. Si, en plus, ces deux triangles partagent un sommet et que leur côtés homologues opposés à ce sommet sont parallèles, on peut alors utiliser le théorème de Thalès. Si le sommet partagé est A, ce théorème dit que $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'} = x$. Les deux figures ci-dessous montrent les deux cas possibles.





Produit scalaire

Le produit scalaire est une opération définie entre deux vecteurs, dont le résultat est un scalaire. Elle peut être définie de deux manières différentes, soit à partir des coordonnées des vecteurs en question, soit à partir de leurs normes et de l'angle entre les deux vecteurs. Soient deux vecteurs $\vec{u} = (u_x; u_y)$ et $\vec{v} = (v_x; v_y)$ faisant un angle $\hat{uv}$ entre eux. Le produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est alors défini comme $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \times v_x + u_y \times v_y = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\hat{uv})$. Deux vecteurs perpendiculaires ont donc un produit scalaire nul, et deux vecteurs parallèles ont un produit scalaire égal à plus ou moins le produit de leurs normes.

Norme d'un vecteur

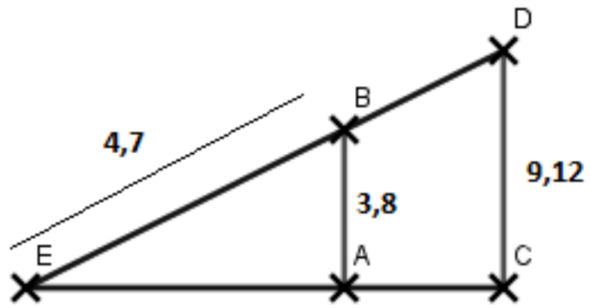
La norme d'un vecteur est la longueur de ce vecteur. Elle peut être calculée généralement soit grâce à des relations trigonométriques, soit grâce au théorème de Pythagore. En effet, si un vecteur $\vec{u} = (u_x; u_y)$ fait un angle θ avec l'axe des abscisses alors sa norme est égale à $\frac{u_x}{\cos(\theta)}$ et à $\frac{u_y}{\sin(\theta)}$. Elle sera également égale à $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$.

Relation de Chasles

La relation de Chasles est un résultat de construction vectorielle. Si on additionne le vecteur $\overrightarrow{AC}$ et le vecteur $\overrightarrow{CB}$, on obtient le vecteur $\overrightarrow{AB}$, car aller de A à C puis de C à B est équivalent à aller directement de A à B.

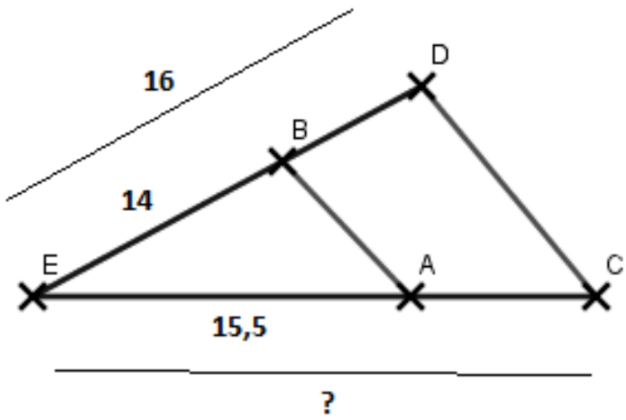
I Théorème de Thalès

1. (SF1269) Comment peut-on calculer ED ?



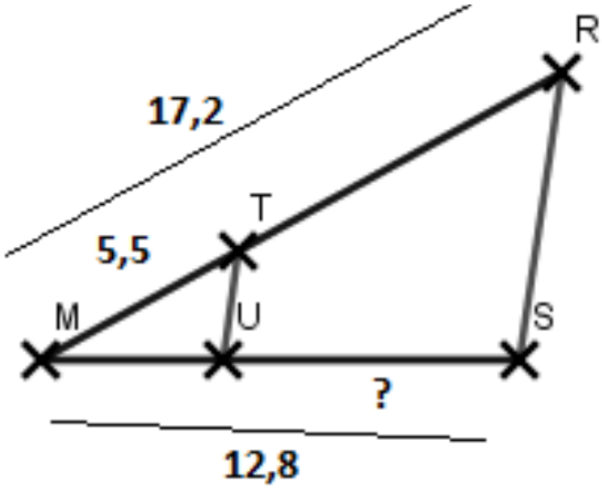
- ☐ $9.12 \times 4.7 \div 3.8$
- ☐ $9.12 \times 3.8 \div 4.7$
- ☐ $3.8 \times 4.7 \div 9.12$

2. (SF1269) Comment peut-on calculer EC ?



- ☐ $16 \times 14 \div 15.5$
- ☐ $14 \times 15.5 \div 16$
- ☐ $16 \times 15.5 \div 14$

3. (SF1269) Comment peut-on calculer US ?



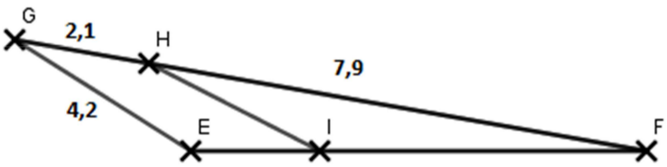
☐ $17.2 \times 12.8 \div 5.5$

☐ $12.8 - (5.5 \times 12.8 \div 17.2)$

☐ $5.5 \times 12.8 \div 17.2$

☐ $5.5 \times 17.2 \div 12.8$

4. (SF1269) Comment peut-on calculer HI ?



☐ $2.1 \times 4.2 \div 7.9$

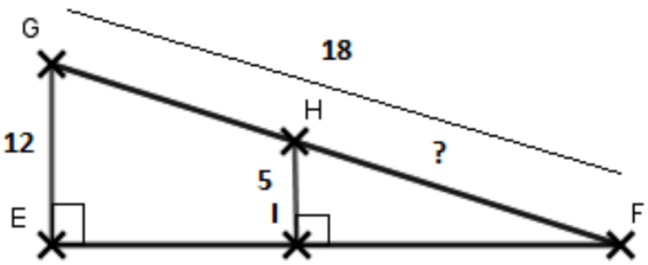
☐ $4.2 \times 7.9 \div 2.1$

☐ $4.2 \times 10 \div 7.9$

☐ $10 \times 7.9 \div 4.2$

☐ $4.2 \times 7.9 \div 10$

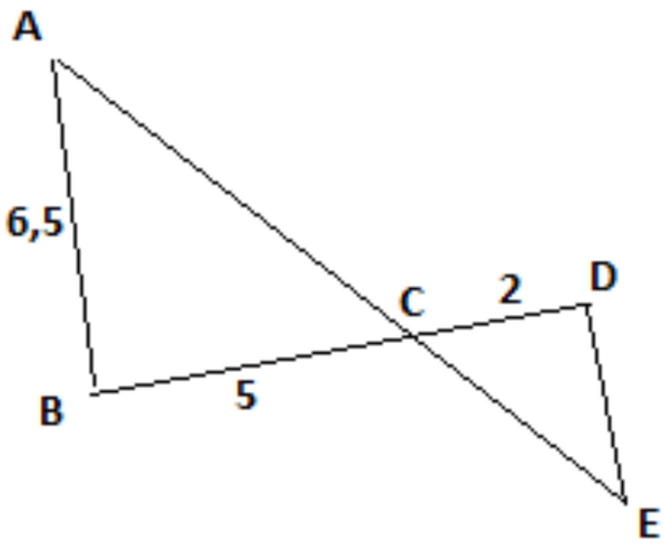
5. (SF1269) Combien peut-on calculer HF ?



☐ $5 \times 12 \div 18$

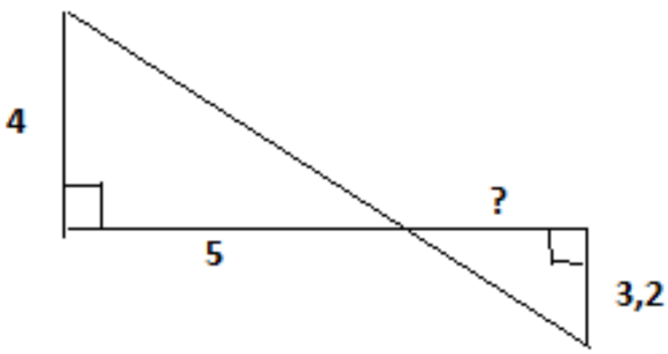
- ☐ $12 \times 18 \div 5$
- ☐ $5 \times 18 \div 12$

6. (SF1269) Comment peut-on calculer DE ?



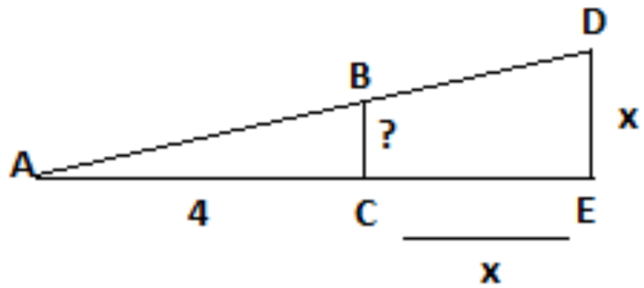
- ☐ $2 \times 6.5 \div 7$
- ☐ $2 \times 7 \div 6.5$
- ☐ $2 \times 6.5 \div 5$
- ☐ $7 \times 6.5 \div 2$

7. (SF1269) Comment peut-on calculer le côté cherché ?



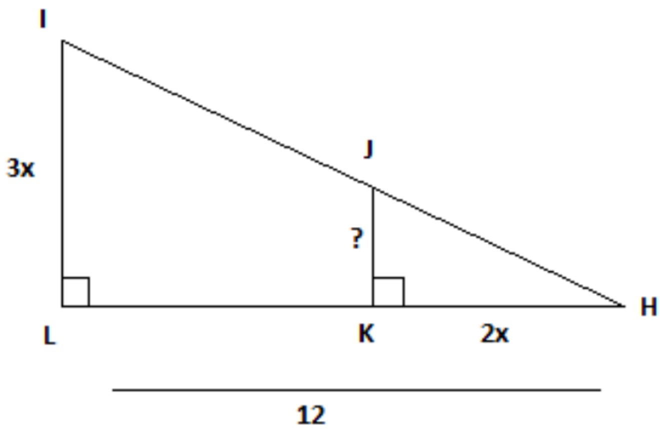
- ☐ $5 \times 4 \div 3.2$
- ☐ $5 \times 3.2 \div 4$
- ☐ $3.2 \times 4 \div 5$

8. (SF1269) Comment peut-on calculer BC ?



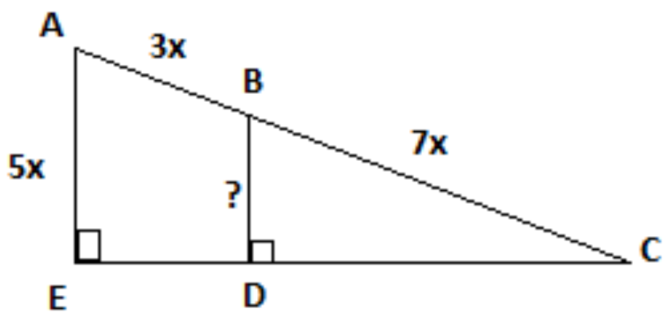
- ☐ $\frac{4x}{x}$
- ☐ $\frac{4x}{4+x}$
- ☐ $\frac{16+4x}{x}$
- ☐ $\frac{4x+x^2}{4}$

9. (SF1269) Comment peut-on calculer JK ?



- ☐ $\frac{3x\times 12}{3x}$
- ☐ $\frac{2x\times 12}{3x}$
- ☐ $\frac{3x\times 2x}{12}$

10. (SF1269) Comment peut-on calculer BD ?



- ☐ $\frac{7x\times 5x}{3x}$

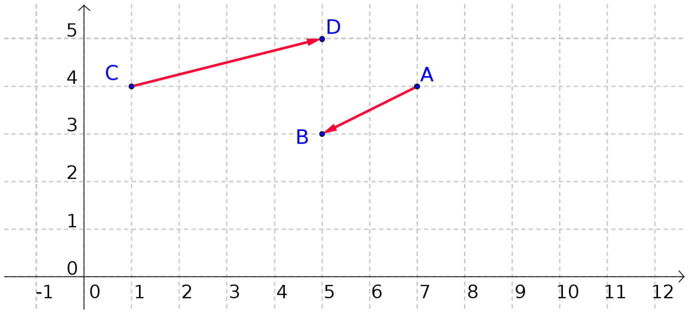
- ☐ $\frac{7x\times 3x}{5x}$
- ☐ $\frac{7x\times 5x}{10x}$
- ☐ $3.5x$
- ☐ $\frac{5x\times 3x}{7x}$

II Produit scalaire

1. (SF1205) Quelle est la nature du résultat du produit scalaire de deux vecteurs ?
   - ☐ Un vecteur
   - ☐ Un nombre
   - ☐ Une fonction
2. (SF1205) Soit $\vec{A} = (a_x; a_y)$ et $\vec{B} = (b_x; b_y)$, quel est le produit scalaire entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$?
   - ☐ $(a_x + b_x; a_y + b_y)$
   - ☐ $a_x \times b_x \times \cos(\widehat{a_y b_y})$
   - ☐ $(a_x + b_x) \times (a_y + b_y)$
   - ☐ $a_x \times b_x + a_y \times b_y$
3. (SF1205) Soit $\vec{A} = a_x\vec{u_x} + a_y\vec{u_y}$ et $\vec{B} = b_x\vec{u_x} + b_y\vec{u_y}$, avec $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$ les vecteurs unitaires des axes (Ox) et (Oy) du plan. Quel est le produit scalaire entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$?
   - ☐ $(a_x + b_x\ ;\ a_y + b_y)$
   - ☐ $(a_x + b_x)\vec{u_x} + (a_y + b_y)\vec{u_y}$
   - ☐ $(a_x\vec{u_x} + a_y\vec{u_y}) \cdot (b_x\vec{u_x} + b_y\vec{u_y})$
   - ☐ $a_xb_x + a_yb_y$
4. (SF1205) Soit $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$ les vecteurs unitaires des axes (Ox) et (Oy) du plan orthonormé. Quelles sont les affirmations vraies ?
   - ☐ $\vec{u_x} \cdot \vec{u_y} = 1$
   - ☐ $\|\vec{u_x}\| = 1$
   - ☐ $\vec{u_x} \cdot \vec{u_y} = 0$
   - ☐ $\vec{u_x} \cdot \vec{u_x} = 1$
5. (SF1205) Soient deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. On connaît leurs normes ($||\vec{A}||$ et $||\vec{B}||$) et l'angle entre les deux ($\widehat{AB}$). Quel est le produit scalaire entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$?
   - ☐ $||\vec{A}|| \times ||\vec{B}|| \times \cos(\widehat{AB})$
   - ☐ $||\vec{A}|| \times ||\vec{B}|| \times \sin(\widehat{AB})$
   - ☐ $||\vec{A}|| + ||\vec{B}||$

☐ $||\vec{A}|| \times ||\vec{B}||$

6. (SF1205) Combien vaut le produit scalaire entre $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$?



☐ -9
☐ -21
☐ -55
☐ -7

7. (SF1205) Calculez le produit scalaire des vecteurs $\vec{A} = (4; 2; 1)$ et $\vec{B} = (1; 0; 6)$.

☐ 10
☐ 11
☐ 42
☐ 14

8. (SF1205) Le couplage d'un système ayant un moment magnétique $\vec{\mu}$ avec un champ magnétique $\vec{B}$ modifie l'énergie du système d'une quantité $\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Que vaut cette quantité quand $\vec{\mu} = (2; -6; 5)$ et $\vec{B} = (-3; 1; -6)$?

☐ $\Delta E = 7$
☐ $\Delta E = -42$
☐ $\Delta E = -7$
☐ $\Delta E = 42$

III Normes

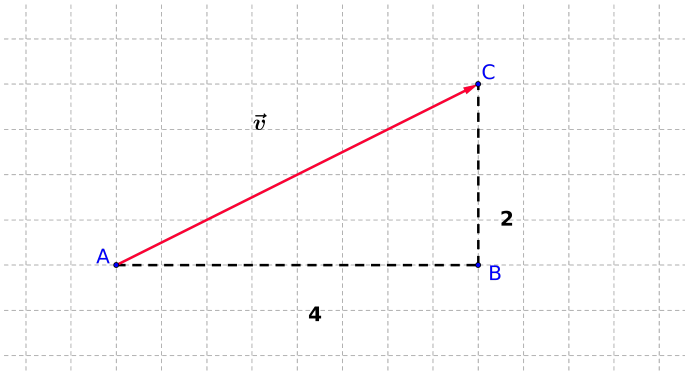
1. (SF1202) Soit un vecteur $\vec{A} = (a_x; a_y)$. Quelle est la norme de ce vecteur ?

☐ $a_x + a_y$
☐ $a_x \times a_y$
☐ $a_x^2 + a_y^2$
☐ $\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

2. (SF1202) Soit un vecteur $\vec{A} = (a_x; a_y; a_z)$. Quelle est la norme de ce vecteur ?

- ☐ $a_x + a_y + a_z$
- ☐ $a_x \times a_y \times a_z$
- ☐ $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$
- ☐ $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

3. (SF1202) Quelle est la norme du vecteur $\vec{v}$?



- ☐ 6
- ☐ $\sqrt{6}$
- ☐ 20
- ☐ $\sqrt{20}$

4. (SF1202) Un vecteur a pour coordonnées dans le plan : $x = 4$ et $y = 3$. Combien vaut sa norme ?

- ☐ 6
- ☐ 5
- ☐ 7
- ☐ 12

5. (SF1202) Quelle est la norme F du vecteur force de coordonnées dans le plan $\vec{F} = (12; 5)$?

- ☐ 13 N.
- ☐ 14 N.
- ☐ 15 N.
- ☐ 18 N.

IV Relation de Chasles

1. (SF1135) Simplifier les expressions suivantes en utilisant la relation de Chasles :

   (a) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}$

(b) $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$

(c) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$

(d) $\overrightarrow{2AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}$

(e) $\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BE}$

2. (SF1135) Soit ABC un triangle. On considère les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$. Montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Que peut-on conclure sur les points A, E et C ?

3. (SF1135) Soit ABC un triangle. On considère les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Montrer que $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, puis que $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$. Que peut-on conclure ?