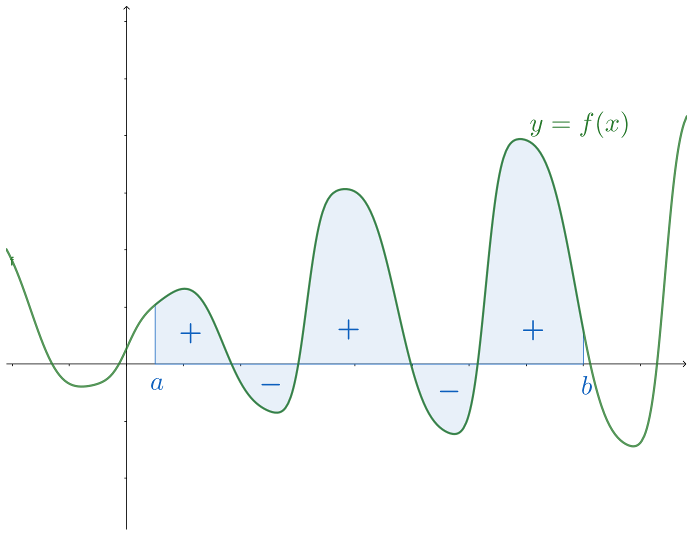
n°8 - Intégration : Interprétation géométrique et formule de la moyenne
(Corrigé)

Notes de Cours

I Aire algébrique et moyenne

I.A Aire algébrique

Si $a < b$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire algébrique comprise l'axe des abscisse et le graphe de f, délimitée par les abscisses a et b : on compte positivement les aires des parties où f est positive ou nulle, et négativement les aires où f est négative.



Par ailleurs, on pose par convention

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

I.B Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Interprétation géométrique

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on peut intérpréter la quantité $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$ comme la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. En particulier, on a

$$\int_a^b m\, dx = m(b-a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

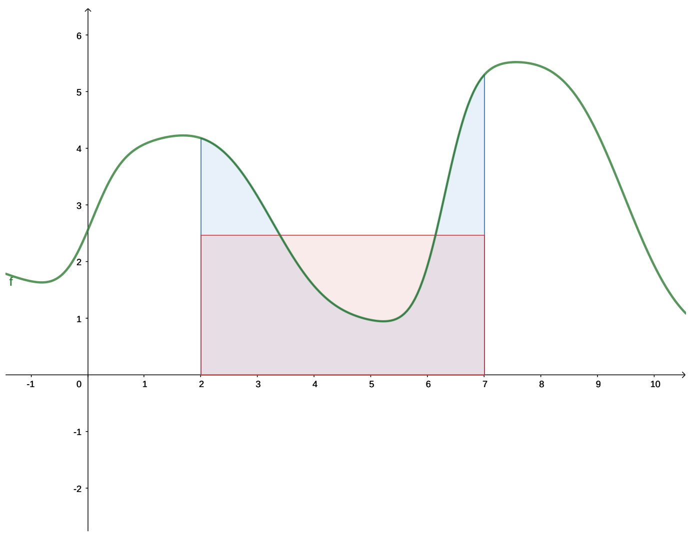
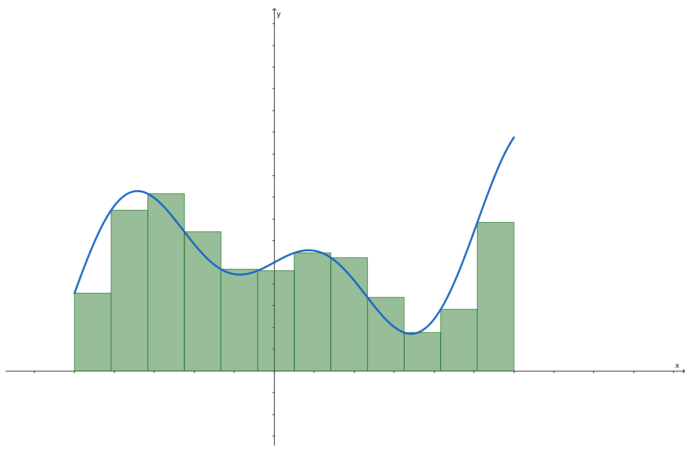


FIGURE 1 – L'aire sous la courbe entre 2 et 7 est égale entre à l'aire du rectangle rouge.

Sommes de Riemann



Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, la valeur moyenne de f calculée en n points répartis régulièrement dans l'intervalle $[a, b]$ tend vers la quantité $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$.

$$\frac{f(a + (b-a)/n) + f(a + 2(b-a)/n) + \ldots + f(b)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

En particulier pour $a = 0$ et $b = 1$, on a

$$\frac{f(1/n) + f(2/n) + f(3/n) + \ldots + f(1)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx$$

Théorème et inégalité de la moyenne

Théorème I.1 (Théorème de la moyenne)**.** *Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction* ***continue****. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

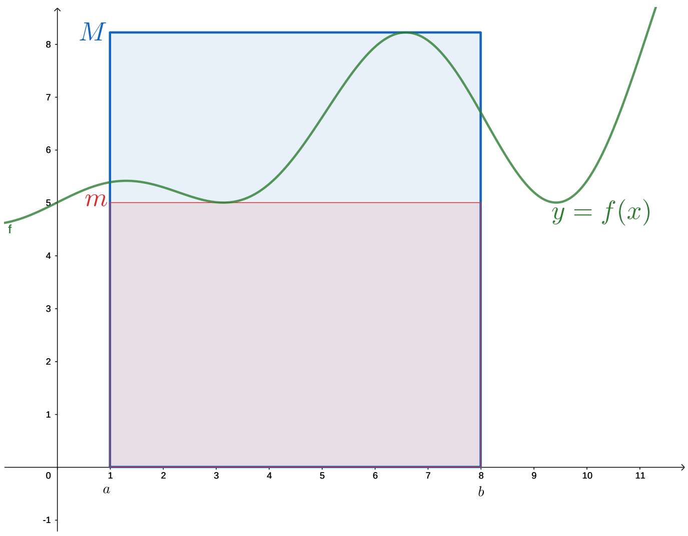
Théorème I.2 (Inégalité de la moyenne)**.** *Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction* ***continue****. On suppose que f est bornée entre m et M : pour tout $x \in [a,b]$*

$$m \le f(x) \le M$$

Alors on a l'inégalité

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

L'inégalité de la moyenne nous dit que l'aire sous la courbe de f est comprise entre les aires des rectangles de hauteur m et M. Elle entraine également qu'une fonction comprise entre m et M possède une valeur moyenne comprise entre m et M.



II Exercices

II.A Calculs d'aires

1. (SF 1198) **Valeur absolue**
   On considère la fonction $f(x) = |x|$.

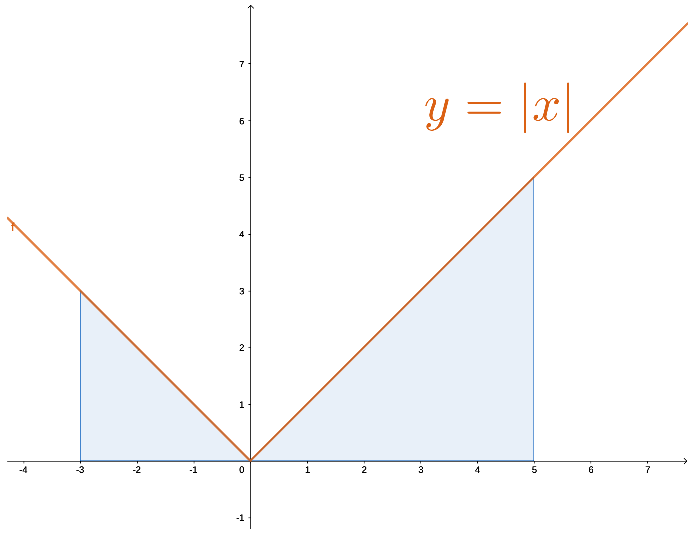
(a) Tracer le graphe de f.

(b) Par un calcul d'aire, déterminer la valeur de

$$\int_{-3}^{5} |x|\, dx$$

Solution :

(a)



(b) En additionnant les aires des triangles, on trouve

$$\int_{-3}^{5} |x|\, dx = \frac{3^2}{2} + \frac{5^2}{2} = 17$$

---

2. (SF 1198) **Demi-cercle**

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

(a) Justifier que le graphe de f est un demi-cercle donc on précisera le centre et le rayon.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale

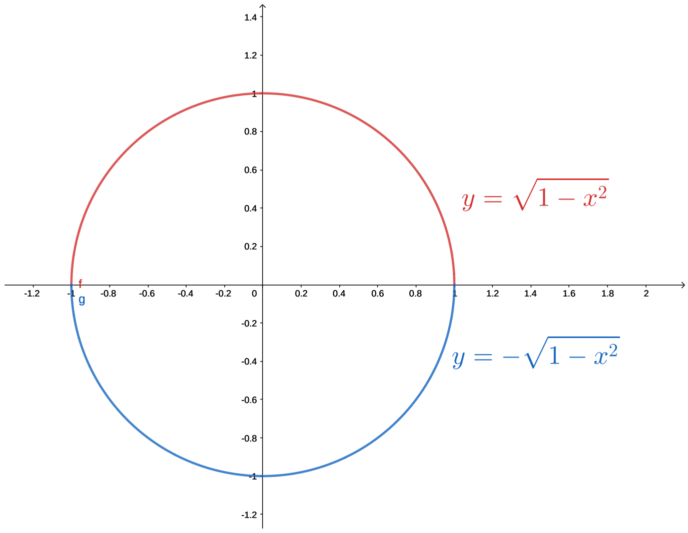
$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Solution :

(a) Le graphe de f est un demi-cercle de centre $(0, 0)$ est de rayon 1. En effet, le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 a pour équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

La branche $y = \sqrt{1-x^2}$ correspond au graphe de f, et la branche $y = -\sqrt{1-x^2}$ est son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Chacune est donc un demi-cercle.



(b) En conclusion l'aire à calculer est celle d'un demi-disque de rayon 1 :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

II.B Théorème et inégalité de la moyenne

3. **Inégalité de la moyenne**
On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

et on pose

$$I = \int_{2}^{3} f(x)\, dx$$

(a) Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$ (on dressera la tableau de variation avec les limites aux bornes).

(b) En déduire un encadrement de f sur l'intervalle $[2, 3]$.
On donne les valeurs numériques approchées : $\frac{\ln(2)}{2} \simeq 0.34657$, $\frac{1}{e} = 0.36787$ *et* $\frac{\ln(3)}{3} \simeq 0.36620$

(c) En utilisant l'inégalité de la moyenne, donner un encadrement de I.

Solution : La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$, c'est-à-dire positif pour $x < e$ et négatif ou nul sinon. On a le tableau de variation (la limite en 0^+ est une forme déterminée, et la limite en $+\infty$ se trouve par croissance comparée) :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

(a) D'après les valeurs numériques, on a $f(2) \leq f(3)$, donc pour tout $x \in [2, 3]$,

$$f(2) \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$$

(b) La fonction f est continue sur $[2, 3]$, donc d'après l'inégalité de la question précédente, l'inégalité de la moyenne nous donne

$$0,34 \leq f(2) \leq I \leq \frac{1}{e} \leq 0,37$$

En conclusion, l'intégrale I vaut environ $0,3$ à 10^{-1} près.

---

4. **Limite d'une suite**
Déterminer la limite de la suite

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \sin(x^2)\, dx$$

définie pour $n \geq 1$.
Indication : On pourra utiliser l'inégalité de la moyenne

Solution : La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est continue sur $[0, 1]$ et vérifie

$$-1 \leq \sin(x^2) \leq 1$$

donc d'après l'inégalité de la moyenne, on l'encadrement

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

ce qui implique d'après le théorème des gendarmes que $\lim_{n \geq 0} u_n = 0$

---

5. **Limite d'une suite**
Déterminer la limite de la suite
$$v_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln(x)}\, dx$$
définie pour $n \geq 2$.

Solution : Comme le logarithme est croissant, son inverse est décroissante, et pour tout $x \in [n, n+1]$, on a
$$\frac{1}{\ln(n))} \leq \frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$$
d'où on tire l'encadrement
$$\frac{1}{\ln(n))} \leq v_n \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$$
et par gendarmes, la limite
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

---

6. **Formule de la moyenne et TAF**
Dans cet exerice on se propose de démontrer le théorème de la moyenne. On se donne donc une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On définit la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ par
$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$
(a) Justifier que F est continue et dérivable. Que vaut $F'(x)$?
(b) En applicant le théorème des accroissement finis à F, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Solution :
(a) Comme f est continue, alors F est continument dérivable, donc également continue, et sa dérivée est f.
(b) Comme F est dérivable sur $[a, b]$, d'après le théorème des accroissement finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}$$
or comme F est une primitive de f, alors $F'(c) = f(c)$ et $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$. L'égalité ci-dessus se réécrit donc
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$
ce qui conclut.

II.C Sommes de Riemann

7. Math 101 : exercice 124 **Aire sous la parabole**

En utilisant les sommes de Riemmann, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$.

On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution : On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. La somme de Riemmann associée à f est

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
&= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

On peut par ailleurs retrouver ce résultat via le théorème fondamental de l'analyse puisque $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

---

8. Math 101 : exercice 124 En utilisant des sommes de Riemmann associées à des fonctions que l'on déterminera, calculer les limites des suites suivantes :

(a)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta}$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels.

(b)

$$I_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Solution :

(a) On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n\alpha + k\beta} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha + \frac{k}{n}\beta} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{\alpha + \beta x}\, dx \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\alpha + \beta x}\, dx &\underset{t=\alpha+\beta x}{=} \int_\alpha^{\alpha+\beta} \frac{1}{t} \frac{dt}{\beta} \\ &= \frac{1}{\beta} \left[\ln(t)\right]_\alpha^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Donc en conclusion

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)$$

(b) On a

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{1/n} + \sqrt{2/n} + \ldots + \sqrt{n/n}}{n} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

---

9. (SF 64) Math 101 : exercice 125, examen 2018 Déterminer les limites des suites suivantes :

(a)

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}},$$

(b)

$$v_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Solution : Pour transformer les produits en sommes, passons au logarithme.

(a)

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+x)\,dx\end{aligned}$$

Par ailleurs, on calcule l'intégrale par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x)\,dx &= \int_0^1 \overbrace{1}^{\uparrow}\ \underbrace{\ln(1+x)}_{\downarrow}\,dx\\ &= [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}\,dx\\ &= 2\ln(2) - [x]_0^1\\ &= 2\ln(2) - 1\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{2\ln(2)-1} = \frac{4}{e}$$

(b)

$$\ln(v_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

Il ne s'agit pas d'une somme de Riemmann, mais on peut encadrer les termes de la somme, en effet

$$1 \leq 1+\frac{k}{n^2} \leq 1+\frac{1}{n}$$

Donc par croissance du logarithme on a

$$0 \leq \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$0 \leq \ln(v_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$$

En conclusion on a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = e^0 = 1$$