n°7 - Dérivation, interprétation géométrique, lemme de Rolle, Théorème des accroissements finis

Notes de Cours

I Dérivation et théorème des accroissements finis

I.A Dérivée et tangente

Définition I.1 (Dérivée)**.** *On dit que f est **dérivable en** a si la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite pour x tendant vers a (avec $x \neq a$). Quand elle existe, cette limite est appelée la dérivée en a de f, noté $f'(a)$:*

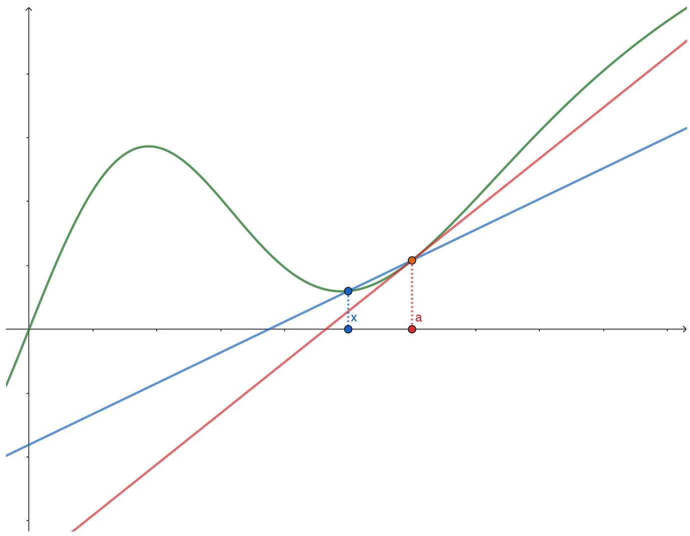
$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

De manière équivalente, en effectuant le changement de variable $h = x - a$, on peut écrire

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq a}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interprétation géométrique :

Quand elle existe, la quantité $f'(a)$ correspond au **coefficient directeur de la tangente en** a au graphe de f. En effet, la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, appelée **taux de variation** de f entre x et a, peut s'interpréter comme le coefficient directeur de la droite sécante au graphe de f aux points d'abscisses x et a. Or la dérivée de f en a est définie comme la limite du taux de variation de f entre a et x, donc cela correspond à la pente de la “secante limite”, c'est-à-dire la tangente en a.



La secante (en bleu) s'approche de la tangente (en rouge) à mesure que x s'approche de a.

Si $a \neq b$ sont deux points distincts, la sécante au graphe de f entre les points d'abscisses a et b a pour équation

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

et si f est dérivable en f, on peut faire tendre b vers a pour obtenir la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

On obtient ainsi l'équation de la tangente en a au graphe de f.

I.B Rolle et TAF

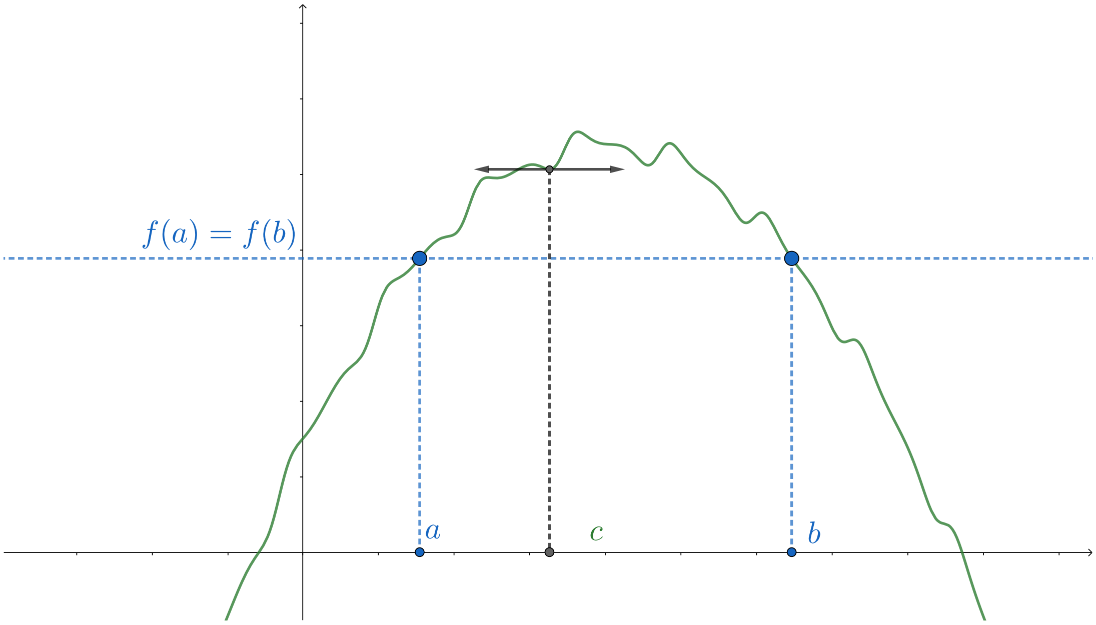
Le lemme de Rolle dit qu'une fonction f dérivable qui prend deux fois la même valeur possède un point d'annulation de sa dérivée entre les deux (ce qui correspond graphiquement à une tangente horizontale pour le graphe de la fonction f).

Théorème I.2 (Lemme de Rolle)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.* ***On suppose*** *qu'il existe deux points distincts $a < b$ dans I tels que*

$$f(a) = f(b)$$

alors *il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = 0$$



Le point c n'est pas unique en général, le théorème assure l'existence d'**au moins** un point $c \in]a, b[$, mais il peut très bien y en avoir plusieurs (par exemple sur l'illustration ci-dessus, il y a plusieurs autres points où la tangente est horizontale).

Remarque I.3 (Un peu d'histoire)**.** *Rolle s'intéressait au problème d'encadrer les solutions des équations polynoniales et le théorème qu'il formule dans un ouvrage en 1690 ne concernait que les polynômes et ne faisait pas intervenir de calcul infinitésimal (la dérivée du polynôme était juste vue comme une opération formelle appelée "cascade"). Il n'était probablement pas le premier à avoir découvert ce résultat, il semble en effet que le mathématicien indien Bhāskara II (1114–1185) connaissait déjà ce thèorème plus de 500 ans avant Rolle.*

Une conséquence (et une généralisation) du lemme de Rolle est le théorème des Accroissements Finis (parfois abrégé en l'acronyme TAF) :

Théorème I.4 (Théorème des Accroissements Finis)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Pour tous points distincts $a < b$ dans I, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration. Soient $a < b$ dans I. On considère la fonction $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. La fonction g est dérivable sur I et on a

$$g(a) = f(a), \qquad g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$$

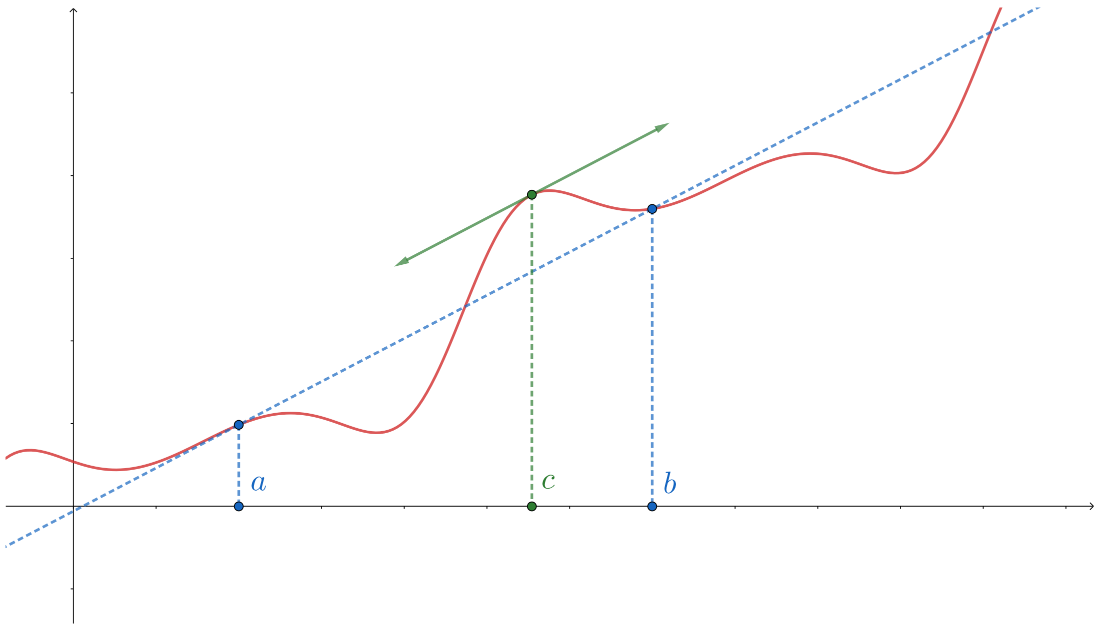
donc d'après le Lemme de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

ce qui donne l'égalité souhaitée. □

Dans ce théorème, on peut interpréter géométriquement les quantités $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ comme la pente de la sécante entre a et b au graphe de f, et $f'(c)$ comme la pente de la tangente en c au graphe de f. Et une égalité de pentes revient à dire que ces deux droites sont parallèles. En d'autres termes, le théorème des accroissements finis nous dit que pour toute secante au graphe de f (prise entre des points a et b), il existe au moins une tangente au graphe de f (au point c) qui est parallèle à cette sécante.

$$\underbrace{f'(c)}_{\text{pente de la tangente en } c} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{pente de la sécante entre } a \text{ et } b}$$



Tout comme dans le lemme de Rolle, le point c dépend de a et b et n'est pas forcément unique.

Mentionnons la généralisation à l'ordre n du théorème des acrroissements finis : la formule de Taylor Lagrange, qui permet si la fonction est n fois dérivable en un point, de l'approximer autour de ce point par un polynôme de degré $n-1$.

Théorème I.5 (Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Soit $a \in I$, pour tout $x \in I$, il existe $c \in]a, x[$ tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ + \ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

I.C Inégalité des accroissements finis

Une conséquence du théorème des accroissements finis est l'inégalité des accroissements finis qui permet de majorer les variations de f si on peut borner sa dérivée.

Théorème I.6 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose que la dérivée est bornée sur I, c'est-à-dire qu'il existe $M \geq 0$ tels que* *pour tout* $x \in I$,

$$|f'(x)| \leq M$$

alors pour tout $a, b \in I$ *distincts, on a*

$$|f(a) - f(b)| \leq M|b - a|$$

Démonstration. On se donne $a, b \in I$ distincts. Quitte à inverser les noms de a et b, on peut supposer $a < b$ (cela ne change rien car $|f(a)-f(b)| = |f(b)-f(a)|$ et $|b-a| = |a-b|$). Comme f est dérivable sur I, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$$

et donc en prenant la valeur absolue

$$|f(a) - f(b)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\leq M} \cdot |b - a| \leq M|b - a|$$

□

II Exercices

II.A Calculs de dérivées

1. (SF 22, 23, 24) **(Aspect fondamental)** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3x^5 + 3x^2 + 2 \qquad f_2(x) = 7x\cos(x) \qquad f_3(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$$

$$f_4(x) = x\sin(x) + \ln(x)\cos(x) \qquad f_5(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} \qquad f_6(x) = \frac{x^2+\cos(x)}{x^4 + x\sin(x) + 2}$$

2. (SF 22, 23, 24, 25) **(Aspect fondamental)** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3(2x+5)^5 \qquad f_2(x) = e^{5x^4} \qquad f_3(x) = \sin(3x+2)$$

$$f_4(x) = (\ln(x))^2 \qquad f_5(x) = \ln(\cos(x)) \qquad f_6(x) = \cos(\ln(x))$$

3. (SF 22, 23, 24, 25) Math101 : Exercice 79 Soit f une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin(f(x^2)), \qquad f_2(x) = \sin(f(x)^2), \qquad f_3(x) = \sin^2 f(x),$$

$$f_4(x) = \sqrt{1 + f(x)^4}, \qquad f_5(x) = \ln(2 + \cos(f(x))), \qquad f_6(x) = \tan\frac{\pi}{2 + f(x)^2}$$

4. (SF 22, 23, 24, 25, 39) Math101 : Exercice 82 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

$$f_1(x) = x^2 + 1 + x^{11} + x^{101}, \qquad f_2(x) = x^5 \cos(x), \qquad f_3(x) = e^x \sin(x)$$

$$f_4(x) = \frac{1+x}{x-7}, \qquad f_5(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}, \qquad f_6(x) = \frac{1-x^3}{(1+x)^2},$$

$$f_7(x) = \frac{x + \sin x}{\cos x}$$

5. (SF 28) Math151 : Test 1 (2014)
   (a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f_1 : x \mapsto \sin(2x)$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{12}$.
   (b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f_2 : x \mapsto \sqrt{1+x}$ au point d'abscisse 3.
   (c) ($*$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^{f(x)}$. On suppose que la tangente au graphe de g au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 3x + 1$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
6. (SF 28) Soit $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.
   (a) Déterminer l'équation de la sécante graphe de f aux points d'abscisses respectives -1 et 3.
   (b) Déterminer toutes les tangentes au graphe de f qui sont parallèles à cette sécante.
7. (SF 22, 23, 24, 25, 28, 39) Math151 : Exercice 2.2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine définition, domaine de dérivabilité et dérivée des fonctions suivantes, puis donner l'équation de la tangente à son graphe au point indiqué entre parenthèses.

$$f_1(x) = \frac{9x^3 - 4}{8x^3 + 6} \quad (\text{en } 1) \qquad f_2(x) = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} \quad (\text{en } 1)$$

$$f_3(x) = x^3 e^{\sin(x)} \quad (\text{en } \pi) \qquad f_4(x) = \ln(\ln(x)) \quad (\text{en } e)$$

II.B Limites du taux de variations

La définition de la dérivée comme limite du taux de variation peut tantôt être utilisée de deux manière : soit pour calculer la dérivée d'une fonction qu'on ne connaît pas (à supposer qu'on sache déterminer la limite du taux de variation), soit pour calculer la limite d'un taux de variation (à supposer qu'on sache dériver la fonction).

8. **Dérivées de polynômes**
   (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on considère la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$. En calculant la limite du taux de variation, retrouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on $f'(x) = a$.
   (b) On considère la fonction $g : x \mapsto x^2$. En calculant la limite du taux de variation, retrouver que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on $g'(x) = 2x$.
   (c) Généraliser avec la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   Puisqu'on a démontré que la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$ et que la dérivée d'une somme est obtenu en dérivant chaque terme de la somme, on peut alors conclure que de manière générale, que la dérivée du polynôme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est le polynôme $x \mapsto n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1$

9. **Dérivée de l'exponentielle**
En admettant que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, montrer que la fonction exponentielle est égale à sa propre dérivée en tout point.

10. **Dérivée du cosinus** Math101 : partiel 2 (2019)

(a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin(x)\sin(y)$$

(b) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

(c) En admettant que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-1}{x} = 1$, montrer que la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\cos'(x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

11. **Faire apparaître des taux de variation**
En faisant apparaître de taux de variation, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{2x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{x}$$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi} \qquad \lim_{x\to -1} \frac{\cos(\pi x)+1}{x+1} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}$$

12. **Règle de L'Hôpital (1)**
La règle de l'Hôpital est utile pour lever des formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$ en faisant appel à la dérivation. Elle généralise la technique de l'exercice précédent.

(a) Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$, on se donne $a \in I$ un point de l'intervalle. On suppose f et g dérivables en a, avec $g(a) \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(b) En utilisant ce résulat, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(5x)-1}{\ln(1+x)} \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{\sin(4x)}{\tan(3x)} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2}-e}{\ln(x)}$$

Remarque II.1 (Le nom l'Hôpital)**.** *Le nom de cette règle n'a pas de rapport avec un hôpital, mais elle vient du mathématicien français Guillaume François Antoine de L'Hôpital. En effet, on trouve le résultat pour la première fois dans son ouvrage* l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes *publié en 1696. Il est possible que le véritable auteur de la règle soit en fait Jean Bernoulli, que L'Hôpital payait 300 livres par an pour le tenir informé des progrès du calcul infinitésimal, ainsi que le droit d'utiliser ses découvertes. Pour ne pas s'attribuer les travaux de Bernouilli, L'Hôpital publia son livre anonymement, mais la règle n'en fut pas moins nommée d'après lui.*

II.C Applications du lemme de Rolle

13. **Une application du lemme de Rolle**
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 - x$$

(a) En utlisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

(b) En résolvant l'équation, trouver toutes les valeurs $c \in]-1,1[$ telles que $f'(c) = 0$.

14. **Une application du lemme de Rolle**
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \cos(2x)$$

(a) En utlisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]0,2\pi[$ tel que $g'(c) = 0$.

(b) En résolvant l'équation, trouver toutes les valeurs $c \in]0,2\pi[$ telles que $g'(c) = 0$.

15. (SF 39) **Un contre-exemple à Rolle ?**
On considère la fonction $h(x) = \tan(x)$.

(a) Déterminer le domaine de définition D_h, et de dérivabilité $D_{h'}$ de h ?

(b) Calculer $h'(x)$ et montrer que $h'(x) \geq 1$ pour tout $x \in D_{h'}$.

(c) Montrer que $h(0) = h(\pi)$. Montrer qu'il n'existe pas de point $c \in]0,\pi[$ tel que $h'(c) = 0$. Est-ce en contradiction avec le lemme de Rolle ?

16. **Démonstration du TAF**
Dans cet exercice, on cherche à déduire le théorème des accroissements finis à partir du lemme de Rolle. Pour cela, on se donne un intervalle I, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et $a < b$ dans I. On considère la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

(a) Calculer $h(a)$ et $h(b)$. En utilisant le lemme de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$.

(b) Conclure qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

17. On considère le polynôme

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7$$

Montrer que P' admet au moins une racine dans $]0,2[$.

18. Math 151 : test 2 (2019) Soit $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 3$. Montrer qu'il existe $c \in]1,3[$ tel que $f'(c) = 0$.
Indication : On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, puis le lemme de Rolle.

19. **Double Rolle**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **deux fois** dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $a_1 < a_2 < a_3$ dans I tels que

$$f(a_1) = f(a_2) = f(a_3)$$

(a) Montrer qu'il existe $c_1 < c_2$ dans I tels que

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0$$

(b) En déduire qu'il existe $c_3 \in I$ tel que

$$f''(c_3) = 0$$

II.D Théorème et inégalité des accroissements finis

20. Math151 : test 2 (2019) Existe-t-il une fonction dérivable $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et $f'(x) \leq -2$ pour tout $x \in [0,1]$?

21. Math151 : Exercice 2.10 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.

(a) En utilisant l'inégalité des accroissement finis, montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$$

(b) Interpréter graphiquement cette inégalité dans le cas $b = 0$.

22. **Série Harmonique** Math101 : Partiel 2 (2018)

On considère la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n \geq 1$ par $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

(a) Soit $n \geq 1$. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\ln(n+1) < H_n < \ln(n) + 1$$

(c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} H_n$

23. **Monotonie et signe de la dérivée**

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et dérivable sur I. On cherche dans cet exercice à démontrer l'équivalence

$$f \text{ croissante sur } I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$$

(a) On suppose dans cette question que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$. On cherche à montrer que f est croissante sur I.

i. Montrer que pour tous $x < y$ dans I, il existe $c_{x,y} \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c_{x,y})(y - x)$$

ii. En déduire que f est croissante sur I.

(b) On suppose dans cette question que f est croissante sur I. On cherche à démonter que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

i. Soit $x \in I$. Montrer que pour tous $y \in I \setminus \{x\}$, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Indication : On pourra séparer les cas $x < y$ et $x > y$.

ii. En passant à la limite quand $y \to x$ dans l'inégalité précédente, montrer que

$$f'(x) \geq 0$$