n°1 – Calcul élémentaire, développement, factorisation, fractions, puissances

Notes du Cours

Une des propriétés les plus utiles dans la pratique du calcul est la propriété distributive du produit par rapport à la somme : $a(b+c) = ab + ac$ pour tous les nombres réels a, b, c. Cette notion nous permet de traiter les problèmes les plus simples, en nous garantissant des manipulations dans un sens ("**développer**") ou dans l'autre ("**factoriser**"). De cette façon, $3(x+2) = 3x + 6$ est un exemple de développement, alors que $x^2 + x = x(x+1)$ est un exemple de factorisation. Puisqu'une égalité est une relation symétrique entre deux expressions ($a = b$ si et seulement si $b = a$), factoriser et développer ne veut pas dire autre chose que lire la même équation dans les deux sens !

Cette propriété est utile dans la pratique même s'il s'agit de traiter de fractions. Les réduire à un dénominateur commun, et ensuite les réduire à un ratio de nombres premiers entre eux, c'est en fait un exemple de factorisation :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5+2}{10} = \frac{7}{10}$$

qui bien sûr peut être lu à l'envers comme un exemple de développement.

Enfin un petit rappel aux propriétés des **puissances**, c'est-à-dire multiplier un nombre par lui-même un certain nombre de fois. Soit x un réel (dit "la base"). Si m, n sont de nombres entiers, on a

$$x^0 = x^{m-m} = 1,\ x^{-m} = \frac{1}{x^m},\ x^m x^n = x^{m+n},\ (x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m (\text{avec } x > 0)$$

Nous supposerons que ces propriétés valables pour des exposants entiers sont également valables pour des exposants m, n réels arbitraires (une discussion appropriée de cette extension nous prendrait trop de temps...). Pour nos besoins, il suffit de penser que m, n sont rationnels (c'est à dire, nombres de la forme p/q avec p et q entiers et $q \neq 0$).

Donc on a par exemple $(\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{1/3} = x^{2/3}$ et $x^{1/2} \cdot x^{1/3} = x^{1/2+1/3} = x^{5/6}$.

Dans la suite, les exercices désignés par le symbole † doivent être considérés comme des **aspects fondamentaux**, tandis que les exercices désignés par le symbole $*$ sont considérés comme plus difficiles.

1. (SF9) Factoriser les fractions suivantes

$1_1^\dagger)$ $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$

$1_2^\dagger)$ $\dfrac{11}{2}-\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{10}$

$1_3^\dagger)$ $\dfrac{1}{13}+\dfrac{4}{26}-\dfrac{1}{2}$

$1_4^\dagger)$ $\dfrac{11}{7}-\dfrac{5}{3}+1$

$1_5^\dagger)$ $\dfrac{7}{24}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{6}$

$1_6^\dagger)$ $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$

$1_7^\dagger)$ $\dfrac{1}{2}-\dfrac{11}{4}-\dfrac{13}{8}-\dfrac{1}{16}$

$1_8)$ $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}$

$1_9)$ $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}$

$1_{10})$ $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{49}$

$1_{11})$ $1+\dfrac{1}{121}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{49}$

$1_{12})$ $-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}$

$1_{13})$ $-2+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{3}+5-\dfrac{1}{10}$

$1_{14}^*)$ $e+2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$1_{15}^*)$ $\pi+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+5$

2. (SF9) Réduire les expressions suivantes en la forme x^α

$2_1^\dagger)$ $x\cdot x^2,\ \dfrac{x^3}{x^{1/2}},\ \dfrac{1}{x^{-1/2}\cdot x}$

$2_2^\dagger)$ $\dfrac{x^{1/3}\cdot x}{x^{2/3}\cdot x^2}$

$2_3)$ $\dfrac{(x^{5/4}\cdot x)^2}{\sqrt{x}\cdot x^4}$

$2_4)$ $\dfrac{(x^{1/2}\cdot x^{3/2}\cdot x)^2}{x^{-1/2}\cdot x^{-1/4}\cdot x^{-5/4}}$

$2_5)$ $\dfrac{x\cdot x^2\cdot x^3\cdot x^3}{x\cdot x^4\cdot x^9\cdot x^{16}}$

$2_6^\dagger)$ $\dfrac{x^{-1}\cdot x^{-1/2}\cdot x^{-1/3}}{x^3\cdot x^2\cdot x}$

$2_7^\dagger)$ $\dfrac{(x^{1/3}\cdot x^{-1/2})^2}{x^{2/5}\cdot x^{1/2}\cdot x^3}$

$2_8)$ $\dfrac{x^{2/3}\cdot x^{-11/2}\cdot x^2}{x^{7/3}\cdot x^{-1}\cdot x^{1/3}}$

$2_9)$ $\dfrac{x^{2/7}\cdot x^{-3}(x^{2/5}\cdot x^{-1/3})^5}{\sqrt{x}\cdot x^{3/2}}$

$2_{10})$ $\dfrac{x\cdot x^{1/2}\cdot x^{1/3}\cdot x^{1/4}\cdot x^{2/7}}{x^4\cdot x^{-1/2}\cdot x^{1/3}\cdot x^{1/12}}$

$2_{11}^\dagger)$ $\dfrac{(-x)^3}{x^{1/4}(-2x)^2}$

$2_{12}^\dagger)$ $\dfrac{x^{-2}\ \sqrt[5/2]{x}}{(2\sqrt{2}x)^{2/3}}$

$2_{13})$ $\dfrac{x^a\cdot x^b\cdot x^c}{x^d\cdot x^e\cdot x^f},\ a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$

$2_{14}^*)$ $\dfrac{(\sqrt[3]{x})^{1/3}(3\sqrt[5]{x})^{1/5}(5\sqrt{7}x)^{1/7}}{x^3\cdot x^5\cdot x^7}$

$2_{15}^*)$ $\dfrac{(2\sqrt{5}x)^2(2\sqrt{7}x^{1/4})^6(-2\sqrt[6]{11}x)^3}{x^{2/7}\cdot x^{-1/5}}$

3. (SF9) Développer les expressions suivantes

$3_1^\dagger)$ $(2x+6)(x-3)$

$3_2^\dagger)$ $(x+1)(x-2)$

$3_3)$ $\left(x-\dfrac{11}{7}\right)(7x+3)$

$3_4^\dagger)$ $\left(\dfrac{4x}{15}-1\right)(2-5x)$

$3_5)$ $\left(\dfrac{11x}{3}+\dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{23}{29}-\dfrac{7x}{3}\right)$

$3_6^\dagger)$ $(5x+1)(2x-1)(x+1)$

$3_7)$ $(1-2x)\left(\dfrac{x}{2}+1\right)(3+x)$

$3_8)$ $\left(\dfrac{1}{2}-3x\right)\left(\dfrac{1}{2}+3x\right)(x+4)$

$3_9)$ $\left(\dfrac{7x}{5}-2\right)\left(\dfrac{2x}{3}+1\right)(x-1)$

$3_{10})$ $\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{11x}{4}+\dfrac{2}{3}\right)\left(4-\dfrac{2x}{5}\right)$

puis

$3^{\dagger}_{11}$) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
$3^{\dagger}_{12}$) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
3_{13}) $\left(\frac{11x}{2}-1\right)\left(x+\frac{2x}{3}\right)(x+2)\left(\frac{x}{2}-1\right)$
3_{14}) $\left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\frac{x}{2}-1\right)(x-2)(x-3)$
3^{*}_{15}) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{x}{6}-\frac{1}{3}\right)$

4. (SF9) Factoriser les expressions suivantes

$4^{\dagger}_{1}$) $3x^2-12x$
$4^{\dagger}_{2}$) $-\frac{2}{3}x^2+\frac{14}{21}x$
$4^{\dagger}_{3}$) ax^2+bx
4_{4}) x^3-2x^2+4x-8
4_{5}) x^4-1
4_{6}) $3x^3+3x^2+x-\frac{1}{3}$
4_{7}) $6x^3-4x^2-\frac{3}{2}x+1$
4_{8}) $x^3-\frac{7}{6}x^2-\frac{14}{9}x-\frac{2}{9}$
4_{9}) $-x^4+\frac{11}{3}x^3+\frac{x^2}{3}-\frac{19}{3}x-2$
4_{10}) $x^5-3x^4-x^3+3x^2$

et puis

4_{11}) $x^6-2x^4-x^2+2$
4_{12}) $x^6-2x^5+x^4-4x^3+4x^2-2x+4$
4_{13}) $acx^2+(ad+bc)x+bd,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$
4^{*}_{14}) $abcx^3+(acf+ceb+aed)x^2+(adf+bcf+bde)x+bdf,\ a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$
4^{*}_{15}) $-x^4+(\pi+e+1)x^3-(e\pi+\pi+e-2)x^2+(e\pi-2\pi-2e)x+2e\pi$

5. (SF8,SF9) En vertu de ce qui a été appris dans les exercices précédentes, résoudre[1] les équations suivantes :

$5_0^\dagger$) $ax + b = 0, \ a, b \in \mathbb{R}$

$5_1^\dagger$) $\dfrac{x^2 \cdot x^{1/2} \cdot x^{2/3}}{x^{5/6}} = 3$

5_2) $\dfrac{x^3 \cdot x^{1/9}}{\sqrt[3]{x}(-2x^{1/2})^4} = 1$

5_3) $(x+1)^2 - (x-1)^2 = a, \ a \in \mathbb{R}$

5_4^*) $\alpha \dfrac{x^a}{2x^b} - \beta \dfrac{x^c}{3x^d} = 0, \ \alpha, \beta, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ t.q. $b + c = a + d$ (supposer $x > 0$)

5_5^*) $(x+1)^4 - (x-1)^4 - 8x^3 - 4 = 0$

1. c'est-à-dire : exprimer l'inconnue x en fonction des autres symboles qui apparaissent dans l'équation.