TD 3 : Implication/équivalence

1 Avec les concepts utilisés dans maths 101

Exercice 1 ().

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire si :

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire si :

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions paires. On définit

$$f + g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array}$$

   Démontrer que la fonction $f + g$ est paire.
2. Soient f et g deux fonctions paires. On définit

$$f \times g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array}$$

   Démontrer que la fonction $f \times g$ est paire.
3. Démontrer que le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.
4. Soit f une fonction paire dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f' est impaire.
5. Démontrer que la dérivée d'une fonction impaire dérivable sur $\mathbb{R}$ est paire.

Exercice 2 ().

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que f est croissante sur I si et seulement si :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que f est décroissante sur I si et seulement si :

Pour toutes les questions de l'exercice, vous ferez deux démonstrations : la première en supposant que toutes les fonctions sont dérivables et la seconde sans l'hypothèse que la dérivée existe (donc en s'interdisant d'utiliser la dérivée).

1. Démontrer que la somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
2. Démontrer que si f est croissante et g décroissante alors $g \circ f$ est décroissante.
3. Démontrer que si f est décroissante et g décroissante alors $g \circ f$ est croissante.

Exercice 3 ().
Démontrer qu'une fonction est paire et impaire si et seulement si elle est nulle.

2 Tiré de maths 101

Exercice 4 (). *Sur les suites*

1. Ecrire dans un tableau les définitions des propriétés suivantes de suites : majorée, minorée, bornée, croissante, décroissante, de limite l, de Cauchy.
2. Démontrer qu'une suite u_n est croissante si et seulement si $-u_n$ est décroissante.
3. Prouver qu'une suite est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.
4. Démontrer que $|u_n|$ tend vers 0 si et seulement si u_n tend vers 0.
5. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l + l'$.
6. Démontrer que si une suite est convergente alors elle est bornée.
7. Prouver que toute suite convergente est de Cauchy.
8. Démontrer que si une suite est de Cauchy alors elle est bornée.
9. Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Exercice 5 (). *Sur les fonctions*

1. Démontrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ admet un maximum.
2. Démontrer que si $f : [-1,1] \to [-2,2]$ est une bijection impaire alors f^{-1} est impaire.
3. Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ est continue alors f est constante.