TD 2

1 Exercices d'application directe

Exercice 1 ().
Parmi les nombres 0, 1, 2, 3, 4 et 5, lesquels sont dans l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n+1 \text{ est un multiple de } 3\}$?

Correction

Les éléments 2 et 5 sont dans A, les éléments 0, 1, 3 et 4 ne sont pas dans A. Plus généralement $A = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, \ldots\}$

Exercice 2 ().

1. Démontrer que $1 \in \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x + 1 = 0\}$.
2. Démontrer que $(1, 2) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - y = 0\}$.
3. Démontrer que $(1, -1, 0) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y - z = 1\}$.
4. Est-ce que les vecteurs $(1, 1, 1), (1, 2, 1)$ sont des éléments de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y - z = 0\}$?
5. La fonction $f : t \mapsto \cos(t)$ est-elle un élément de $F = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \int_{-\pi}^{\pi} tf(t)dt = 0\}$? Justifiez proprement.
6. La suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle un élément de $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0\}$? Justifiez proprement.
7. Démontrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \in \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1\}$.

Correction

1. $1 \in \mathbb{R}$ et $1^2 - 2 \times 1 + 1 = 0$ donc $1 \in \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x + 1 = 0\}$.
2. $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$ et $2 \times 1 - 2 = 0$ donc $(1, 2) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - y = 0\}$.
3. $(1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ et $2 \times 1 + (-1) - 0 = 1$ donc $(1, -1, 0) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y - z = 1\}$.
4. **But :** Etudier si $(1, 1, 1)$ appartient à F.
   Traduction du but : Regarder si $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ et si ce vecteur vérifie $2x - y - z = 0$.
   Or $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ et $2 \times 1 - 1 - 1 = 0$.
   Donc $(1, 1, 1) \in F$.
5. **But :** Etudier si f appartient à F.
   Traduction du but : Regarder si $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et si f vérifie $\int_{-\pi}^{\pi} tf(t)dt = 0$.
   Or $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\int_{-\pi}^{\pi} tf(t)dt = 0$ car $g : t \mapsto t\cos(t)$ est une fonction impaire.
   En effet $\forall y \in \mathbb{R}, g(-t) = -t\cos(-t) = -t\cos(t) = g(t)$, la deuxième égalité étant due au fait que cos est paire.
   Donc $f \in F$.

Exercice 3 (). On considère l'ensemble $A = \{-1, 2, 3, 6, 5, 4, 0, 12, -100\}$ et les sous-ensembles $B = \{-1, 6, 5\}$ et $C = \{2, -100, 12, 5, 4\}$.
Déterminer ${}^cB, B \cup C, B \cap C, A \setminus C, {}^cA \cup {}^cB, {}^cA \cap {}^cB, {}^c(A \cup B), {}^c(A \cap B)$.

Exercice 4 ().
On se place dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

1. Décrire explicitement les ensembles suivants sous forme d'unions d'intervalles : $[0, 1] \cap]1/2, 12]$, $[0, +\infty[\cup] - 1, 1[$, ${}^c[0, 1] \cap]1/2, 12]$, ${}^c[0, 1] \cap {}^c]1/2, 12]$.
2. Expliciter $\{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 1\} \cap \{\frac{1}{2}, -\frac{12}{7}, 1, 0, 3\}$.
3. Expliciter $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$ et $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$.

4. Expliciter ${}^c\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}$.
5. Expliciter ${}^c\mathbb{Z}\cap[0,1]$.

Solution sans rédaction

1. $[0,1]\cap]0.5,12] \;=]0.5,1]$, $[0,+\infty[\cup]-1,1[=]-1,+\infty[$, ${}^c[0,1]\cap]0.5,12] \;=]1,12]$, ${}^c[0,1]\cap{}^c]0.5,12] \;=]-\infty,0[\cup]12,+\infty[$.
2. $\{x\in\mathbb{R}, -1\leq x<1\}\cap\{\frac{1}{2},-\frac{12}{7},1,0,3\}=\{\frac{1}{2},0\}$
3. $\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}=\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$.
4. ${}^c\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers strictement négatifs.
5. ${}^c\mathbb{Z}\cap[0,1]=]0,1[$.

Exercice 5 (). Dans chacun des cas de figure suivants, quelle est l'image par la fonction f de l'ensemble de départ ? Quel est l'ensemble des antécédents de 1 par f ? La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ? rien du tout ?

$$\begin{array}{rcl} f_1:\{-1,4,7\} & \longrightarrow & \{1,2,5\} \\ -1 & \longmapsto & 2 \\ 4 & \longmapsto & 5 \\ 7 & \longmapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_2:\{0,2,3\} & \longrightarrow & \{1,10\} \\ 0 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_3:\{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,3\} \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 3 \\ 3 & \longmapsto & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_4:\{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,3,4\} \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 3 \\ 3 & \longmapsto & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_5:\{-1,0,1\} & \longrightarrow & \{1,2,3,4\} \\ -1 & \longmapsto & 1 \\ 0 & \longmapsto & 4 \\ 1 & \longmapsto & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_6:\{\heartsuit,\diamondsuit,\clubsuit\} & \longrightarrow & \{-1,1,\diamondsuit\} \\ \heartsuit & \longmapsto & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \longmapsto & -1 \\ \clubsuit & \longmapsto & -1 \end{array}$$

Solution sans rédaction

1. f_1 est bijective, $f_1(\{-1,4,7\})=\{1,2,5\}$ et $f_1^{\langle-1\rangle}(\{1\})=\{7\}$.
2. f_2 est surjective non injective, $f_2(\{0,2,3\})=\{1,10\}$ et $f_2^{\langle-1\rangle}(\{1\})=\{0,2\}$.
3. f_3 est bijective, $f_3(\{1,2,3\})=\{1,2,3\}$ et $f_3^{\langle-1\rangle}(\{1\})=\{1\}$.
4. f_4 est injective non surjective, $f_4(\{1,2,3\})=\{1,2,3\}$ et $f_4^{\langle-1\rangle}(\{1\})=\{1\}$.
5. f_5 est injective non surjective, $f_5(\{-1,0,1\})=\{1,2,4\}$ et $f_5^{\langle-1\rangle}(\{1\})=\{-1\}$.
6. f_5 est non injective non surjective, $f_6(\{\heartsuit,\diamondsuit,\clubsuit\})=\{-1,\diamondsuit\}$ et $f_6^{\langle-1\rangle}(\{1\})=\emptyset$.

Exercice 6 (). Dans chacun des cas de figure suivants, tracer le graphe de la fonction et dire si elle est continue, dérivable, monotone (le cas échéant, préciser si elle est croissante, décroissante et si la monotonie est stricte), injective, surjective.

$$f_1 : \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} [-5,-2] & \longrightarrow & [-6,-2] \\ x & \longmapsto & x^2+6x+3 \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{rcl} [-1,2] & \longrightarrow & [-2,5] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x-1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 6x-7 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{rcl} [-2,2] & \longrightarrow & \{-1,0,1,2\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Solution sans rédaction

1. f_1 est dérivable (donc aussi continue), strictement décroissante, bijective.
2. f_2 est dérivable (donc aussi continue), non monotone (décroissante sur $[-5,-3]$ et croissante sur $[-3,-2]$), surjective non injective (par exemple $f(-4) = f(-2) = -5$).
3. f_3 est continue mais non dérivable (en 1), stricement croissante, bijective.
4. f_4 est dérivable (donc aussi continue), strictement croissante, bijective.
5. f_5 est continue mais non dérivable (en 0 et en 1), croissante (non strictement), surjective non injective (par exemple $f(0) = f(1) = -1$)
6. f_6 est non continue, croissante (non strictement), non surjective (car 1 n'a pas d'antécédent par f) non injective (par exemple $f(1) = f(2) = 2$)

Exercice 7 (Equation de droite, cercle).
On considère $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ le plan Euclidien. On se donne $A = (x_A, y_A) \in \mathcal{P}$ un point du plan, $\vec{n} = (a,b)$ un vecteur non nul du plan, et $R > 0$ un réel.

1. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon R. Montrer que
$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P}, AM = R\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-x_A)^2 + (x-y_A)^2 = R^2\right\}$$
2. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Montrer que
$$\mathcal{D} = \left\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, ax+by = ax_A + by_A\right\}$$

Exercice 8 ().
Dessiner dans le plan les ensembles suivants

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x+10\right\} \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+12 \geq 3y-2\right\}$$

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-3)^2 + (y+3)^2 = 1\right\} \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-3)^2 + (y+3)^2 = 8^2\right\}$$

$$I = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\right\} \qquad L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-3)^2 + (y+3)^2 \leq 4\right\}$$

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [-1,2], y \in [0,3]\right\} \qquad E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-3)^2 + (y+3)^2 \leq 8^2, y+5 \leq 0\right\}$$

Exercice 9 ().

Expliciter les ensembles suivants

$$D = \{x \in \mathbb{R}, \cos(x)\cos(2x) = 0\}, \qquad E = \{x \in \mathbb{R} \setminus D, \tan(x)\tan(2x) = 1\}$$

Solution sans rédaction

On a

$$\begin{aligned} D &= \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\dots, -\frac{9\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{6\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots\right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E &= \left\{\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\dots, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \dots\right\} \end{aligned}$$