Math 104 Analyse : Test 2
Corrigé

1. Pour x au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\cos(x)-1}\right) &= \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1-x^2/2+o(x^2)-1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2+o(x^2)}\right)\\ &= \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2}{1+o(1)}\right)\\ &= \frac{1}{x^2}\left(1-2(1+o(1))\right)\\ &= \frac{1}{x^2}\left(-1+o(1)\right)\\ &= -\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty\end{aligned}$$

2. **(6 points)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x)=\frac{e^x-1}{\sin x}$$

   (a) Pour x au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^x-1}{\sin x}\\ &= \frac{x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x+o(x^2)}\\ &= \frac{1+\frac{1}{2}x+o(x)}{1+o(x)}\\ &= \left(1+\frac{1}{2}x+o(x)\right)(1+o(x))\\ &= 1+\frac{1}{2}x+o(x)\end{aligned}$$

   En particulier, comme f admet un développement limité en 0 à l'ordre 1, alors f est prolongeable en une fonction continue et dérivable en 0 avec $f(0)=1$ et $f'(0)=\frac{1}{2}$.

   (b) La tangente au graphe de f en 0 a pour équation $y=1+\frac{1}{2}x$, pour déterminer la position relative, il nous faut le signe terme suivant du DL. Pour x au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x - 1}{\sin x} \\
&= \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x - \frac{1}{6}x^3 o(x^3)} \\
&= \frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2) + \frac{1}{6}x^2 \\
&= \underbrace{1 + \frac{1}{2}x}_{\text{tangente}} + \underbrace{\frac{1}{3}x^2 + o(x^2)}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

donc au voisinage de 0, le graphe de f est au dessus de sa tangente.