Math 104 Analyse : Corrigé du test 1

1. Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = \frac{1}{2+e^t}$ sont de la forme

$$y(t) = e^{-t}\left(c + \ln(2 + e^t)\right)$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

2. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 5y = 0$ sont de la forme

$$y(t) = e^{-2t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right)$$

Avec $A, B \in \mathbb{R}$. La solution y_0 vérifiant $y_0(0) = 1$ et $y_0'(0) = 0$ est donnéée par

$$y_0(t) = e^{-2t}\left(\cos(t) + 2\sin(t)\right) = \sqrt{5}e^{-2t}\cos(t - \arctan(2))$$

3. Sur l'intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), la fonction sin ne s'annule pas et l'équation équivaut à

$$y' - \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\, y = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

dont les solutions sont de la forme

$$y(t) = c_k \sin(t) + 1$$

avec $c_k \in \mathbb{R}$.

Examinons désormais comment ces solutions se recollent. On se donne un intervalle I quelconque et une solution y de l'équation différentielle supposée $\mathcal{C}^1$ sur I. Sur chaque intervalle de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$ qui intersecte I, il existe une constante c_K telle que $y(t) = c_k \sin(t) + 1$ pour $t \in I \cap]k\pi, (k+1)\pi[$.

Les constantes sont a priori différentes, mais le caractère $\mathcal{C}^1$ impose qu'elle soient en fait toutes égales. En effet, si on se place en un point $k\pi$ à l'intérieur de I (pas au bord), on calcule les limites de y et y' à gauche et droite. On a

$$\lim_{t\to k\pi^+} y(t) = 1 \qquad \lim_{t\to k\pi^-} y(t) = 1$$
$$\lim_{t\to k\pi^+} y'(t) = c_k \qquad \lim_{t\to k\pi^-} y'(t) = c_{k-1}$$

Donc la continuité n'impose aucune contrainte mais la continuité de la dérivée impose $c_k = c_{k-1}$. De proche en proche, cela signifie que les constantes sont en fait toutes égales et donc qu'il existe une unique constante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$,

$$y(t) = c\sin(t) + 1$$

Enfin la solution y_0 sur $\mathbb{R}$ de cette équation telle que $y_0(\pi/2) = 2$ est donnée par

$$y_0(t) = \sin(t) + 1$$