1 Calculs de développements limités en 0

Exercice 1. — Sommes et produits

$$\frac{1}{1-x} - e^x = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x^3 + \frac{23}{4}x^4 + o(x^4), \qquad (1+x)\sqrt{1+x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\sin(x)\,\cos(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4), \qquad e^x\sqrt{1+x} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + \frac{11}{128}x^4 + o(x^4)$$

$$\cos(x) - 1 - \frac{x}{2}\sin(x) = -x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

Exercice 2. — Quotient et composition

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{4} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^4), \qquad \frac{1}{1-x+x^2} = 1 + x - x^3 - x^4 + o(x^4)$$

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4), \qquad \sqrt{\frac{\sin(x)}{x}} = 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{1440} + o(x^4)$$

Exercice 3. — Intégration

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4), \qquad \arcsin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8) \qquad \int_0^x e^{t^2}\,dt = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Exercice 4. —

$$\ln(1+x)\sin(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + o(x^5), \qquad \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -x - \frac{x^3}{8} - \frac{7x^5}{128} + o(x^5)$$

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^5), \qquad e^{x^2}\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{31}{30}x^5 + o(x^5)$$

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5), \quad \exp(\frac{1}{1-x}) = e\left(1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + \frac{73}{24}x^4 + \frac{167}{40}x^5 + o(x^5)\right)$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5), \qquad \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} + o(x^5)$$

2 Limites, tangentes et positions relatives en 0.

Exercice 5. — Limites

$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}, \qquad \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -2$$

$$\frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1, \qquad \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1,$$

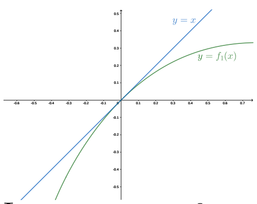
Exercice 6. — Limites

$$\frac{\sin(x)-x}{x\ln(1-x^2)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{6}, \qquad \frac{\sin(2x)-\sin(x)}{2\ln(1+x)-2x-x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{3}{2}$$

$$\frac{e^x-x-\cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

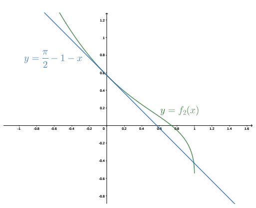
$$\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}$$

Exercice 7. — Tangente en 0 et position relative



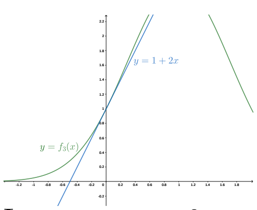
$$f_1(x) = \sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x^2} = \underbrace{x}_{\text{tangente}} \underbrace{-x^2+o(x^2)}_{\leq 0}$$

La tangente en 0 au graphe de f_1 a pour équation $y = x$ et le graphe est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.



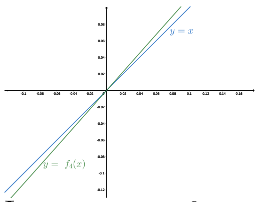
$$f_2(x) = \arccos(x)-\cos(x) = \underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-x}_{\text{tangente}} + \underbrace{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}_{\geq 0}$$

La tangente en 0 au graphe de f_2 a pour équation $y = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)-x$ et le graphe est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.



$$f_3(x) = e^{2x-x^2} = \underbrace{1+2x}_{\text{tangente}} + \underbrace{x^2+o(x^2)}_{\geq 0}$$

La tangente en 0 au graphe de f_3 a pour équation $y = 1+2x$ et le graphe est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.



$$f_4(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt = \underbrace{x}_{\text{tangente}} + \underbrace{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}_{\text{signe de } x^3}$$

La tangente en 0 au graphe de f_4 a pour équation $y = x$ et le graphe passe de en dessous à au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

3 Développements limités en un point autre que 0

Exercice 9. —

$$f(x) = \frac{2 + \sqrt{3+x}}{x-1}$$

1. La fonction f est définie sur $]-3,+\infty[\setminus\{1\} =]-3,1[\cup]1,+\infty[$. En posant $u = x-1$. On a $u \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, donc pour x au voisinage de 1, on a

$$\begin{aligned} 2 - \sqrt{3+x} &= 2 - \sqrt{4+u} \\ &= 2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{u}{4}}\right) \\ &= -\frac{u}{4} + o(u) \end{aligned}$$

donc

$$f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}$$

on peut donc prolonger f en 1 par continuité en posant $f(1) = -\frac{1}{4}$.

2. Pour x au voisinage de 1, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{64}u - \frac{1}{512}u^2 + o(u^2) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{4} + \frac{1}{64}(x-1)}_{\text{tangente}} \underbrace{-\frac{1}{512}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}_{\leq 0} \end{aligned}$$

donc f est dérivable en 1 (et même $\mathcal{C}^2$), l'équation de la tangente en 1 est $y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{64}(x-1)$, et le graphe est en dessous de la tangente.

Exercice 10. —

On pose $u = x-1$. Pour x au voisinage de 1, u est au voisinage de 0, et on a

$$f(x) = 1 + \frac{9}{4}u - \frac{31}{128}u^2 + o(u^2) = \underbrace{1 + \frac{7}{4}(x-1)}_{\text{tangente}} \underbrace{-\frac{15}{64}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}_{\leq 0}$$

donc la tangente en au graphe de f en $x=1$ a pour équation $y = 1 + \frac{9}{4}(x-1)$ et le graphe se situe en dessous de la tangente au voisinage de 1.

$$g(x) = \sqrt{3}\left(\frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + o(u)\right) = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)}_{\text{tangente}} \underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{9}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}_{\leq 0}$$

Exercice 11. —

$$f_1(x) = \frac{2+x}{3+x} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{x+1}{4}}_{\text{tangente en } -1} \underbrace{-\frac{(x+1)^2}{8} + o((x+1)^2)}_{\leq 0}$$

$$f_2(x) = \ln(\sin(x)) = \underbrace{-\frac{1}{2}\ln(2) + \left(\frac{\pi}{4} - x\right)}_{\text{tangente en } \pi/4} \underbrace{-\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2 + o\left(\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2\right)}_{\leq 0}$$

$$f_3(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \underbrace{e - 3e(x-1)}_{\text{tangente en } 1} + \underbrace{\frac{13e}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}_{\leq 0}$$

4 Recherche d'asymptotes et positions relatives

Exercice 12. — Pour $x \to +\infty$, on a

$$f_1(x) = x\sqrt{\frac{x+2}{x}} = \underbrace{x+1}_{\text{asymptote}} + \underbrace{\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\geq 0}$$

$$f_2(x) = \sqrt{x(1+2x)}e^{\frac{1}{x}} = \underbrace{\sqrt{2}x + \frac{5\sqrt{2}}{4}}_{\text{asymptote}} + \underbrace{\frac{23\sqrt{2}}{32x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\geq 0}$$

$$f_3(x) = \ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = \underbrace{\ln(2)}_{\text{asymptote}} + \underbrace{\frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\geq 0}$$

Exercice 13. —

$$f_1(x) = \sqrt{1+x^2}e^{\frac{2}{x}} = \underbrace{x+2}_{\text{asymptote}} + \underbrace{\frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\geq 0}$$

$$f_2(x) = \sqrt{4x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \underbrace{x}_{\text{asymptote}} + \underbrace{\frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\geq 0}$$

$$f_3(x) = \ln(\sqrt{e^x - e^{-x}}) = \underbrace{\frac{x}{2}}_{\text{asymptote}} \underbrace{-\frac{e^{-2x}}{2} + o(e^{-2x})}_{\leq 0}$$

Pour f_3, on commence par écrire

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \ln(\sqrt{e^x - e^{-x}}) \\ &= \ln(\sqrt{e^x}) + \ln(\sqrt{1-e^{-2x}}) \\ &= \frac{x}{2} + \ln(\sqrt{1-e^{-2x}}) \end{aligned}$$

puis on pose $u = e^{-2x}$, on a bien $u \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{x}{2} + \ln(\sqrt{1-u}) \\
&= \frac{x}{2} + \ln\left(1 - \frac{u}{2} + o(u)\right) \\
&= \frac{x}{2} - \frac{u}{2} + o(u) \\
&= \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + o(e^{-2x})
\end{aligned}$$