1 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 19. —

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{e^t - e^{-2t}}{3}$$

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\cos(t - \pi/4)$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = (1-t)e^t$$

$$\begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) = 2e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Remarque 1.1. *Pour mettre une expression $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ sous la forme $\rho\cos(\omega t + \varphi)$, il faut écrire le nombre complexe $a - ib$ sous forme exponentielle $a - ib = \rho e^{i\varphi}$ (avec $\rho > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$). En effet, si $a - ib = \rho e^{i\varphi}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire*

$$\begin{aligned} a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) &= \mathrm{Re}(ae^{i\omega t} - ibe^{i\omega t}) \\ &= \mathrm{Re}((a-ib)e^{i\omega t}) \\ &= \mathrm{Re}(\rho e^{i(\omega t + \varphi)}) \\ &= \rho\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Exercice 20. —

$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{4}$$

$$\begin{cases} y'' - y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = 2 - e^t$$

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = (1-2t)e^{4t}$$

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \cos(t) + 2\sin(t) = \sqrt{5}\cos(t - \arctan(2))$$

Exercice 21. —

1. La fonction $t \mapsto (t+1)e^{-2t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = (5t-1)e^{-2t}$.
2. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y'' - 2y' - 3y = 0$ sont de la forme
$$y(t) = \lambda e^{3t} + \mu e^{-t}$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions $\mathcal{C}^2$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = (5t-1)e^{-2t}$ sont donc de la forme
$$y(t) = (t+1)e^{-2t} + \lambda e^{3t} + \mu e^{-t}$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 22. —

1. La fonction $t \mapsto -\sin(t)e^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + 2y = (\cos(t) - \sin(t))e^{-t}$.
2. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y'' + y' + 2y = 0$ sont de la forme
$$y(t) = e^{-t/2}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions $\mathcal{C}^2$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = (5t-1)e^{-2t}$ sont donc de la forme
$$y(t) = -\sin(t)e^{-t} + e^{-t/2}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 23. —

1. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^t$ sont de la forme
$$y(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + \lambda t + \mu\right)e^t$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y' + y = (2t-1)e^{-t}$ sont de la forme
$$y(t) = \frac{2t+1}{6}e^{-t} + \lambda e^{(2-\sqrt{3})t} + \mu e^{(2+\sqrt{3})t}$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y' + y = (2t-1)e^{-t}$ sont de la forme
$$y(t) = \frac{2t+1}{6}e^{-t} + \lambda e^{(2-\sqrt{3})t} + \mu e^{(2+\sqrt{3})t}$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
4. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = (2t-1)e^{t}$ sont de la forme
$$y(t) = \frac{t^2+2}{2}e^{t} + \lambda e^{t} + \mu e^{3t}$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.