Exercice 5. —

$$(E) \quad t^2y' - y = 0$$

Après recollement, les solutions de l'équation différentielle (E) qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier sont de la forme

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ c_+ e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

avec $c_+ \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. —

$$(E) \quad (1-t)y' + y = t$$

Les solutions sur l'intervalle $]1, +\infty[$ de l'équation différentielle (E) sont de la forme

$$y(t) = c(t-1) - (t-1)\ln(t-1) + 1$$

avec $c \in \mathbb{R}$. Comme $y'(t) = c - 1 - \ln(t-1)$, on constate que quelle que soit la valeur de c, on trouve

$$\lim_{t \to 1^+} y'(t) = +\infty$$

donc il n'existe aucune solution $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 7. —

$$(E) \quad y' + (t-1)y = t^2$$

1. La solution particulière affine est $y : t \mapsto 1 + t$.
2. L'unique solution de (E) vérifiant $y(2) = 2$ est la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$y(t) = 1 + t - e^{t - \frac{t^2}{2}}$$

Exercice 8. —

$$\begin{cases} y' - y = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = 0$$

$$\begin{cases} y' - te^{t^2}y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{\frac{e^{t^2} - 1}{2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y'+y=\sin(t) \\ y(1)=1 \end{array}\right. \iff \forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=\frac{\sin(t)-\cos(t)}{2}+\left(1-\frac{\sin(1)-\cos(1)}{2}\right)e^{1-t}$$

Exercice 9. —

$$\left\{\begin{array}{l} y'+\sin(t)y=0 \\ y(\pi/3)=-2 \end{array}\right. \iff \forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=-2e^{-\cos(t)+\frac{1}{2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (1+t^2)y'-y=0 \\ y(\sqrt{3})=1 \end{array}\right. \iff \forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=e^{\arctan(t)-\frac{\pi}{3}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y'+ty=1 \\ y(0)=1 \end{array}\right. \iff \forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$