Outils Calculatoires

Type 1

Institut Villebon-Charpak

Année 2017 - 2018

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. Il est possible d'admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite. Un barême est donné à titre indicatif.

Le but de ce problème est d'étudier la taille de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire. En particulier, on s'attend pour une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à trouver un espace vectoriel de solutions de dimension n (et dans le cas d'une équation avec second membre, un espace affine). On s'attend à un résultat similaire pour les système différentiels à n fonction inconnues.

Dans la première partie on constate à travers des exemple que ce principe semble fonctionner pourvu que les coefficients ne s'annulent pas. Quand les coefficients s'annulent, on constate que ce principe peut ne pas être vérifier.

Dans les deux parties suivantes, on montre que ce résultat est vrai pour les système différentiels et équations d'ordre n à coefficients constants.

1 Quelques exemples

1.1 Equations homogènes (4 points)

On commence par des exemples d'équations où tout "marche bien".

Résoudre les équations difffférentielles suivantes. Dans chacun des cas, on précisera la dimension de l'espace des solutions et on donnera une base de cet espace.

1. $y' + 2y = 0$
2. $y'' - 7y' + 12y = 0$
3. $y'' + 2y' + y = 0$

4. $y^{(3)} + y^{(2)} + y^{(1)} + y = 0$

1.2 Une équation avec solution unique (4 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E_1)\ \cos(x)y' - \sin(x)y = \cos(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) sur l'intervalle $I_0 =]-\pi/2, \pi/2[$. Faire de même sur l'intervalle $I_k =]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. Si $y \in \mathcal{C}^1(]-\pi/2, 3\pi/2[, \mathbb{R})$ est solution de (E_1), montrer que
$$y(\pi/2) = 0$$
3. ($\star$) Montrer que l'équation (E_1) admet une unique solution continue sur $]-\pi/2, 3\pi/2[$ dont on donnera la formule.
Indication : On admet que $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)} = 0$.

1.3 Une équation avec une infinité de solutions (2 points)

On considère désormais l'équation différentielle

$$(E_2)\ \cos(x)y' + \sin(x)y = \cos^2(x)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_2) sur l'intervalle $I_k =]k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier de l'équation (E_2).

On peut être surpris que les équations (E_1) et (E_2), en apparence similaires, ont en fait des solutions si différentes ! Le "problème" vient du terme devant le y' qui s'annule.

2 Systèmes différentiels homogènes

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice, alors l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de dimension n.*

On commence par quelques exemples numériques

2.1 Exemples de systèmes (4 points)

Résoudre les systèmes différentiels suivants. Dans chacun des cas, on précisera la dimension de l'espace des solutions et on donnera une base de cet espace.

1. $\begin{cases} x' &= -x + y \\ y' &= -x - y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' &= 2x + 3y \\ y' &= 3x + 2y \end{cases}$

2.2 Preuve du théorème (5 points)

Dans cette partie, on se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Et on considère le système différentiel homogène

$$(E_A) \quad X' = AX$$

1. Montrer que l'ensemble
$$\mathcal{S}_A = \left\{ X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n), X' = AX \right\}$$
des solutions de (E_A) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

2. Pour $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur colonne. On définit la fonction $f_C : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ pour $t \in \mathbb{R}$ par
$$f_C(t) = e^{t.A}C$$
   (a) Montrer que $f_C \in \mathcal{S}_A$.

   (b) Réciproquement, soit $X \in \mathcal{S}_A$, on définit $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ pour $t \in \mathbb{R}$ par
   $$Y(t) = e^{-t.A}X(t)$$
   Montrer que $Y' = 0$. En déduire que $X = f_C$ avec $C = X(0)$.

   (c) ($\star$) En déduire que l'application
   $$\begin{aligned} \varphi : K^n &\longrightarrow \mathcal{S}_A \\ C &\longmapsto f_C \end{aligned}$$
   est un isomorphisme. En conclure que $\dim \mathcal{S}_A = n$.

3 Equations homogènes d'ordre 2 (7 points)

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ deux complexes, alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle*

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2).y' + (\lambda_1\lambda_2).y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de dimension 2.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ deux complexes avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - (\lambda_1 + \lambda_2).y' + (\lambda_1\lambda_2).y = 0$$

et le système différentiel

$$(S) \quad X' = AX$$

1. Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), y'' - (\lambda_1 + \lambda_2).y' + (\lambda_1\lambda_2).y = 0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2. (a) Montrer que si y est solution de (E) alors $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution de (S).

   (b) Montrer que si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est solution de (S), alors x_1 est solution de (E).

   (c) En utilisant le résultat de la partie 2.2, déduire que $\dim F = 2$.

3. On suppose désormais $\lambda_1 \neq \lambda_2$

   (a) Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de A. Donner une matrice P inversible et D diagonale telle que

   $$A = PDP^{-1}$$

   On choisira pour P un matrice avec des 1 sur la première ligne. Calculer P^{-1}.

   (b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

   $$e^{t.A} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1\lambda_2(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$$