

Mathématiques Générales 1  
Type 1

Institut Villebon - Georges Charpak

Année 2017 - 2018

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. Le sujet est composé de trois exercices indépendants. Au sein d'un exercice, il est possible d'admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite. Un barème est donné à titre indicatif.

## 1 Une symétrie de $\mathbb{R}^3$ (8 points)

On définit dans  $\mathbb{R}^3$  les deux ensembles

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = z\}$$

et

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = y = 0\}$$

1. Justifier que  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ . Quelles sont leurs dimensions?
2. Montrer que

$$\mathbb{R}^3 = E \oplus F$$

3. On considère l'application linéaire  $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par

$$s(x, y, z) = (z, y, x)$$

- (a) Écrire la matrice de  $s$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$
- (b) Calculer  $s^2$ . En déduire un polynôme annulateur de  $s$  de degré 2. En déduire que  $s$  est diagonalisable.
- (c) Déterminer les valeurs propres de  $s$  et les espaces propres associés.

## 2 Opérateur "miroir" sur les polynômes (8 points)

Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  un polynôme de degré  $\leq 2$ , on définit  $\tilde{P} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  par

$$\tilde{P}(x) = x^2 P\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Exprimer  $\tilde{P}(x)$  en fonction des coefficients de  $P$ , en déduire que  $\tilde{P}$  se prolonge par continuité en 0 et que  $\tilde{P} \in \mathbb{R}_2[X]$ .

2. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto \tilde{P} \end{aligned}$$

- (a) Montrer que l'application  $f$  est linéaire.
- (b) Écrire la matrice de  $f$  dans la base canonique  $(1, X, X^2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- (c) Calculer  $f^2$ . En déduire que  $f$  est diagonalisable (on ne demande pas d'effectuer la diagonalisation).

3. Montrer que la famille  $(X, X^2+1, X^2-1)$  est libre. En déduire que c'est une base de  $\mathbb{R}^2[X]$ . *Indication : Pour montrer que la famille est libre, on pourra partir de la relation  $aX + b(X^2+1) + c(X^2-1) = 0$  et l'appliquer en  $X = i$*
4. Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $(X, X^2+1, X^2-1)$ .

### 3 Diagonalisation complexe (4 points)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  des réels, on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser  $M$  : donner une matrice  $D$  diagonale et  $P$  inversible telles que  $M = PDP^{-1}$ , on calculera aussi  $P^{-1}$ .
2. On considère l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, vu comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et muni de sa base canonique  $(1, i)$ . On se pose  $z_0 = a + ib \in \mathbb{C}$ , et on considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z_0 z \end{aligned}$$

- (a) Montrer que  $f$  est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .
- (b) Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $(1, i)$ .

