Analyse 2

Feuille d'exercices 1 : Séries de Fourier

Institut Villebon - Georges Charpak

Année 2017 - 2018

1 Fonctions périodiques

1.1 Espace des fonctions T-périodiques

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est périodique s'il existe $T > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + T) = f(t)$$

Dans ce cas, on dit que T est une période de f (ou encore que f est T-périodique). Pour $T > 0$ un réel strictement positif on note $\mathcal{F}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions T-périodiques :

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)\}$$

On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions T-périodiques qui sont $\mathcal{C}^k$ (pour $k \in Z$ ou $k = \infty$).

1. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. Justifier que $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}/nT\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ des fonctions nT-périodiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.
4. ($\star$) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ des entiers, montrer que la fonction $t \mapsto e^{iat} + e^{ibt}$ est $2k\pi$ périodique avec $k = \mathrm{ppcm}(a, b)$.

5. ($\star\star\star$) L'ensemble de toutes les fonctions périodiques (de période arbitraire) est-il un espace vectoriel ? *Indication : On pourra considérer la fonction* $f : t \mapsto e^{it} + e^{i\sqrt{2}t}$ *et montrer qu'elle n'est pas périodique. Pour cela, on pourra démontrer puis utiliser le résultat suivant : soient* $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ *des réels, si* $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2$*, alors* $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} = 1$*.*

1.2 ($\star$) Lemme de Lebesgue

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ une fonction T-périodique.

1. On suppose que f est absolument intégrable sur $[0, T]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la quantité $c_n(f)$ et définie et
$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|\, dt$$
En d'autre termes, on vient de montrer que les coefficient de Fourier d'une fonction f sont nécessairement bornés. En vérité, on peut même montrer qu'ils convergent vers 0, nous allons en faire la preuve dans le cas particulier où la fonction est $\mathcal{C}^1$

2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$
$$c_n(f') = in\, c_n(f)$$
en déduire que
$$\lim_{n \to \infty} c_n(f) = 0$$
Indication : Pour la première égalité, on pourra effectuer une intégration par parties.
On a montré que les coefficients de Fourier d'une fonction périodique $\mathcal{C}^1$ tendent vers 0 en l'infini. En vérité, le résultat est encore vrai pour des fonctions seulement intégrables (ce résultat est connu sous le nom de lemme de Lebesgue), mais nous n'en feront pas la preuve.

3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$, montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$
$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{n^2}$$
En déduire que la série d'applications $\sum_{n \geq 0} c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On montre dans l'exercice 2.3 que si la convergence est uniforme, alors la limite de la série $\sum_{n\geq 0} c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}$ est effectivement f. En particulier, si la fonction périodique f est $\mathcal{C}^2$, alors sa série de Fourier converge normalement vers f.

2 Calculs de coefficients de Fourier

2.1 Signal carré

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction 2π-périodique, paire, telle que

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi/2 \\ 0 & \text{si } t = \pi/2 \\ -1 & \text{si } \pi/2 < t \leq \pi \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f. Vérifier que f est continue et $\mathcal{C}^0$ par morceaux. Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f. En déduire que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$
3. En appliquant le théorème de Parseval, montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$
4. En déduire
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
Indication : On pourra séparer les indices pairs et impairs dans la somme.

2.2 Signal triangulaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction 2π-périodique, impaire, telle que

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi/2 \\ \pi - t & \text{si } \pi/2 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f. Vérifier que f est continue par morceaux. Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f.

2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. En appliquant le théorème de Parseval, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

4. En déduire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Indication : Comme dans l'exercice 2.1, on pourra séparer les indices pairs et impairs dans la somme.

2.3 Unicité des coefficients de Fourier

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles. On considère la suite d'applications $(S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\geq 0}$ définies pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

On suppose que la suite d'applications $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f, en particulier montrer que

$$a_n(f) = \alpha_n \qquad b_k(f) = \beta_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

En d'autres termes, si une série trigonométrique converge uniformément vers f, alors les coefficients de Fourier de f sont effectivement les coefficients de la série d'origine.

2.4 Sinus hyperbolique

Soit $x \geq 0$. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π périodique telle que $f(\pi) = 0$ et pour tout $t \in]-\pi, \pi[$,

$$f(t) = \operatorname{sh} xt$$

1. Dessiner le graphe de f. Vérifier que f est continue par morceaux. Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f. En déduire que pour tout $t \in]-\pi, \pi[$

$$\operatorname{sh} xt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, 2n \operatorname{sh} \pi x}{\pi(n^2 + x^2)} \sin nt$$