

Populations : Probabilités
Type 2

Institut Villebon - Georges Charpak

Année 2017 - 2018

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé (ni nécessaire). Les exercices sont indépendants entre eux et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix (pensez indiquer clairement à quel exercice vous répondez). Il est possible d'admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite. Un barème est donné à titre indicatif.

1 Test de dépistage (4 points)

Un laboratoire pharmaceutique vient de mettre au point un test de dépistage pour une maladie rare qui touche 1 individu sur 10000 dans la population. Après des tests cliniques, le laboratoire a mesuré que le test a 99 chances sur 100 d'être positif pour un individu malade ; et 1 chance sur 1000 d'être positif pour un individu non malade.

1. Si le résultat d'un test de dépistage est positif, quelle est la probabilité que l'individu qui a effectué le test soit effectivement malade ?
2. Selon-vous, faut-il mettre ce test de dépistage sur le marché ?

2 Un dé à 5 faces ? (3 points)

Dans un groupe de 5 amis, vous devez tirer au sort qui sortira la poubelle. Ne disposant d'un dé à 5 faces, un ami vous propose d'en simuler un à partir d'un dé standard à 6 faces selon le procédé suivant :

On attribue à chaque jouer un numéro entre 1 et 5. On tire un dé à 6 faces, jusqu'à tant qu'on fasse autre chose qu'un 6. On note alors X la variable aléatoire qui représente le premier résultat du dé qui n'est pas un 6. Le numéro permet de désigner qui sera de corvée de poubelle.

1. Quelles sont les valeurs possibles de la variable X ? Déterminer la loi de X .
2. Cela vous paraît-il être un moyen équitable de tirer au sort qui sortira la poubelle ?
3. (*bonus*) Connaissez-vous un polyèdre à 5 faces ?

3 La garantie (6 points)

Vous venez d'acheter un tout nouvel \clubsuit Phone pour la coquette somme de 1000 euros. Pour protéger ce fragile objet, on vous propose de souscrire à une garantie de 2 ans pour la somme de 250 euros. Le vendeur vous soutient mordicus que c'est investissement rentable, qu'un accident est si vite arrivé et qu'il faut à tout prix éviter de devoir dépenser à nouveau 1000 euros. Mais en bon probabiliste que vous êtes, vous désirez en avoir le coeur net et faire le calcul par vous-même !

La garantie couvre gratuitement tout problème qui interviendrait pendant les deux premières années. Par contre sans garantie, une défaillance matérielle vous coûterait 1000 euros (l'achat d'un nouveau téléphone).

Vous savez qu'un \clubsuit Phone vit en moyenne 3 ans. Vous faites donc l'hypothèse que la durée de vie T (en années) de l'appareil suit une loi de Poisson de paramètre 3. C'est-à-dire que la probabilité que l'appareil meure pendant l'année $n \geq 0$ (on commence le décompte à l'année 0) est donnée par

$$\mathbb{P}(T = n) = e^{-3} \frac{3^n}{n!}$$

1. Donner une expression (en fonction de e^{-3}) de la probabilité que l'appareil meurt avant la fin de la garantie (ici on commence le décompte des années à 0, donc un appareil qui meurt lors de l'année 2 ou après est hors garantie).
Pour les applications numériques dans la suite on pourra considérer que cette probabilité vaut très légèrement en dessous $\frac{1}{5}$.

2. Imaginons que vous ne preniez pas la garantie. On note D la variable qui représente la dépense que vous aurez à faire lors de deux premières années. On supposera pour simplifier qu'on ne peut pas avoir plus d'une panne¹.
- Quelles sont les valeurs possibles de D . Quelle est la loi de la variable $\frac{D}{1000}$?
 - Calculer $\mathbb{E}(D)$.
 - D'un point de vue probabiliste, pensez-vous qu'il est intéressant de prendre la garantie ?

À noter qu'on a pris dans cet exercice plusieurs hypothèses simplificatrices pour faciliter les calculs. Tout d'abord, par obligation légale les appareils électronique bénéficient automatiquement d'une garantie d'un an. La garantie qui vous est proposée est une extension de garantie de deux années supplémentaires. Ensuite, on a négligé le cas de figure malchanceux (et improbable) où l'on rencontre plusieurs défaillances pendant les deux premières années.

4 Sondage anonymisé (3 points)

Lors d'un recensement, un institut national de sondage souhaite déterminer la proportion de la population qui consomme des substances illicites. Malheureusement, il n'est pas possible de poser directement la question (qui avouerait ouvertement un comportement illégal ?). La stratégie suivante est alors adoptée : on demande à chaque personne sondée de tirer une pièce (équilibrée) à pile ou face en secret. On pose alors la question suivante :

“répondez oui si vous ne consommez pas de substances illicites **ou** si vous avez tiré un pile.”

Ainsi, une personne qui répond “oui” pourrait aussi bien être un consommateur qui aurait tiré pile, ou un non consommateur, et la réponse n'est pas incriminante (ce qui permet aux sondés de répondre librement sans peur de poursuites). Pourtant comme, nous allons le voir, il est quand même possible de retrouver la proportion de consommateurs de substances illicites.

On note D l'événement “l'individu consomme des substances illicites” et F l'événement “l'individu a tiré face”.

- Justifier que

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|F)$$

en déduire que

$$\mathbb{P}(D) = \frac{1 - \mathbb{P}(\bar{D} \cup \bar{F})}{\mathbb{P}(F)} = 2(1 - \mathbb{P}(\bar{D} \cup \bar{F}))$$

- Sur 10000 personnes sondées, 9500 ont répondu “oui” à la question. En déduire la proportion de consommateurs de substances illicites dans la population.

1. Numériquement les résultats resteraient similaires dans le modèle plus compliqué où on peut avoir plusieurs pannes.

5 QCM (5 points)

Questions	Réponses
Quand on trinque à 7 convives, combien de "tchin" (choc entre deux verres) devrait-on entendre ?	<input type="checkbox"/> 7 <input type="checkbox"/> 8 <input type="checkbox"/> 21 <input type="checkbox"/> 28
M. Dupont a deux enfants dont au moins l'un d'entre eux est une fille. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon ?	<input type="checkbox"/> $\frac{2}{3}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$
M. Dupond a deux enfants. L'aînée est une fille. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon ?	<input type="checkbox"/> $\frac{2}{3}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$
Une loi de Bernoulli de paramètre p .	<input type="checkbox"/> est aussi une loi uniforme sur $[[0, 1]]$. <input type="checkbox"/> est aussi une loi binomiale de paramètres $(1, p)$. <input type="checkbox"/> est aussi une loi géométrique de paramètre p . <input type="checkbox"/> n'est aucune de ses propositions.
Si on lance deux dés à 6 faces, la probabilité de faire un double est	<input type="checkbox"/> $\frac{30}{36}$. <input type="checkbox"/> $\frac{6}{36}$. <input type="checkbox"/> $\frac{1}{6}$. <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$.