Outils Calculatoires

Feuille d'exercices 5

Institut Villebon-Charpak

Année 2017 - 2018

Dans toute la suite, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Equations linéaires d'ordre 1

1.1 Coefficients constants

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

1. $y' + 2y = x^2$
2. $y' + y = 2\sin(x)$
3. $y' - y = xe^x$
4. $y' + y = x + e^x + \cos(x)$
5. $y' + y = |x|$

1.2 Résolution par intervalles

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'equation différentielle suivante

$$(E) \quad xy' + \lambda x = 0$$

1. Résoudre l'équation (E) sur les intervalles $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$ e t $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
2. Discuter l'existence (ou pas) de solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier selon la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.3 ($\star$) Une famille d'équations différentielles

Soient $n \in \mathbb{N}$. On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_n) \quad y' - y = \frac{x^n}{n!}$$

Avec la condition initiale $y(0) = 0$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène associée.
2. Résoudre (E_0), (E_1) et (E_2).
3. Montrer que si y est solution de (E_{n+1}), alors y' est solution de (E_n).
4. En déduire que l'unique solution de (E_n) avec la condition initiale $y(0) = 0$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$y(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} x^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

1.4 ($\star$)

Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle

$$\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$$

Quelle est la limite de y en 1 et -1 ?

1.5 Coefficients variables

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

1. $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$
2. $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$
3. $(x^2+1)^2\, y' + 2x(x^2+1)y = 1$

1.6

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés

1. $(1+e^x)y' + e^x y = 1 + e^x$ sur $\mathbb{R}$
2. $(e^x - 1)y' + e^x = 1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
3. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0, +\infty[$

1.7 ($\star$) Logarithme complexe ?

Trouver les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que

$$(x-i)y' = y + 1$$

Avec $y(0) = 1$.

Indication : Pour trouver une primitive de $\frac{1}{x-i}$, on pourra écrire la quantité sous forme algébrique puis intégrer les parties réelles et imaginaires.

1.8 ($\star$) Equation intégrale

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1.9 ($\star\star$) Lemme de relèvement

Soient $n \geq 1$ un entier, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction réelle à valeurs complexes.

1. On suppose que pour tout $x \in I$, $f(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ (appelée relèvement de f), telle que
$$f(x) = e^{g(x)}$$
Indication : On pourra considérer l'équation différentielle $f(x)y' - f'(x)y = 0$.
2. On suppose que pour tout $x \in I$, $|f(x)| = 1$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ à valeur réelle telle que pour tout $x \in I$, on a
$$f(x) = e^{i\varphi(x)}$$

2 Equations linéaires d'ordre n à coefficients constants

2.1 Equations homogènes

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes (on donnera les ensembles des solutions complexes, et réelles)

1. $y'' + y = 0$
2. $y'' - 3y' + 2y = 0$

3. $y^3 - y = 0$
4. $y'' + 2y' + 2y = 0$
5. $y^3 - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

2.2 Conditions initales

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

2.3 Oscillations perturbées

Soient $\omega, \omega_0 \in \mathbb{R}_+$ deux réels positifs distincts.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = e^{i\omega_0 x}$$

   vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

   vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

2.4 Avec seconds membres

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

1. $y'' - 5y' + 6y = 3x^2 + 1$
2. $y'' + 6y' + 9y = e^x$
3. $y'' - 2y' + y = e^x$
4. $y'' + y = \cos(x)$

2.5 ($\star$) Second membre polynomial

Quand le second membre d'une équation différentielle d'ordre n à coefficients constants est un polynôme, on a constaté sur des exemples numériques, qu'on arrivait à trouver une solution particulière qui était un polynôme. Dans cet exercice, on cherche à montrer que cela va toujours marcher quelque soit l'équation et le polynôme en second membre : une équation différentielle d'ordre n à coefficients constants dont le second membre est polynmial admet toujours une (unique) solution particulière polynomiale (de même degré que le second membre).

On fixe $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ des coefficients avec $a_n \neq 0$. On définit l'application $u : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$

$$u(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^{(k)}$$

1. Montrer que l'application u est linéaire.
2. (a) Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

   (b) En déduire que u est injective.
3. On fixe $d \in \mathbb{N}$ dans la suite.
   (a) Montrer que $u(\mathbb{C}_d[X]) \subset \mathbb{C}_d[X]$.
   (b) On considère la restriction de u à $\mathbb{C}_d[X]$, c'est-à-dire l'endomorphisme $v = u_{|\mathbb{C}_d[X]} : \mathbb{C}_d[X] \to \mathbb{C}_d[X]$ défini par $v(Q) = u(Q)$ pour $Q \in \mathbb{C}_d[X]$. Montrer que v est bijective.
   (c) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{C}_d[X]$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{C}_d[X]$ qui est solution de l'équation différentielle

$$(E_P) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = P(x)$$

2.6 ($\star$) Comportement asymptotique des solutions

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle linéaire homogène suivante

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = 0$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. On suppose que $\Delta < 0$.

(a) Si $\frac{b}{a} > 0$, montrer que les solutions de (E) vérifient $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

(b) Si $\frac{b}{a} < 0$, montrer que les solutions de (E) vérifient $\lim_{x\to+\infty} |y(x)| = +\infty$.

(c) Que se passe-t-il quand $b = 0$?

2. On suppose que $\Delta > 0$.

(a) Si $\frac{b}{a} > 0$ et $\frac{c}{a} > 0$, montrer que les solutions de (E) vérifient $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

(b) Si $\frac{b}{a} < 0$ et $\frac{c}{a} > 0$, montrer que les solutions de (E) vérifient $\lim_{x\to+\infty} |y(x)| = +\infty$.

(c) Que se passe-t-il si $\frac{c}{a} < 0$? Et quand $c = 0$?

3. Examiner les cas $\Delta = 0$.

3 Systèmes différentiels

3.1 Systèmes homogènes

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes différentiels suivants

$$(E_1)\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & -x \end{array}\right. \qquad (E_2)\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & 3y \\ y' & = & -3x & + & y \end{array}\right.$$

3.2 Système homogène

On considère le système différentiel suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{rclcrcr} 12x' & = & 7x & - & 2y & + & z \\ 3y' & = & -x & + & 2y & - & z \\ 12z' & = & x & - & 2y & + & 7z \end{array}\right.$$

1. Résoudre le système différentiel (S) sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer la solution telle que $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$.

3.3 Variation des constantes

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes différentiels suivants

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcl} x' & = & y & + & t \\ y' & = & x & + & \cos(t) \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x' & = & x & + & y & + & e^{2t} \\ 2y' & = & x & - & y & + & 1 \end{array}\right.$$

3.4 ($\star$) Solutions particulières des équations d'ordre 2

Dans cet exercice on présente une méthode pour déterminer une solution particulière pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 *à coefficients constants : on se ramnène à la résolution d'un système différentiel en dimension* 2, *et on utilise la méthode de la variation des constantes à ce système.*

On se donne $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

On définit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

et le système différentiel

$$(S) \qquad X' = AX + B(t)$$

1. (a) Montrer que si y est solution de l'équation différentielle (E), alors $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel (S).

   (b) Montrer que si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel (S), alors x_1 est solution de l'équation différentielle (E).

2. En utilisant la question précédente, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - y = \mathrm{ch}(x)$$

3.5 ($\star$) Un système différentiel à coefficients variables

On considère le système différentiel

$$(S_1) \begin{cases} x' &= ty \\ y' &= tx \end{cases}$$

3.5.1 Méthode matricielle

1. Ecrire le système sous forme matricielle

$$X' = A(t)X$$

   Trouver $B(t)$ telle que $B'(t) = A(t)$ (on prendra la primitive telle que $B(0) = 0$). Les matrices $B(t)$ et $A(t)$ commutent-elles ?

2. Diagonaliser la matrice $B(t)$. En déduire $e^{B(t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que

$$\frac{d(e^{B(t)})}{dt} = A(t)e^{B(t)}$$

3. En déduire les solutions du système différentiel (S_1).

3.5.2 Vecteurs propres de la transposée

1. On se donne x et y des fonctions solutions du système différentiel (S_1). On pose $z_1 = x + y$ et $z_2 = x - y$. Quelles équations différentielles vérifient les fonctions z_1 et z_2 ?
2. En déduire une expression de z_1 et z_2, puis de x et y.

3.6 ($\star$) Un système différentiel à coefficients variables (2)

On considère le système différentiel

$$(S_2)\begin{cases} x' &= x + ty \\ y' &= y \end{cases}$$

3.6.1 Résolution "à la main"

1. Quel est la forme des solutions pour y ?
2. En injectant, l'expression de y dans la première équation, trouver les solutions du système différentiel (S_2).

3.6.2 Méthode matricielle

1. Ecrire le système sous forme matricielle

$$X' = A(t)X$$

   La matrice $A(t)$ est-elle diagonalisable ?
2. Trouver $t \mapsto B(t)$ telle que $B'(t) = A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on prendra la primitive telle que $B(0) = 0$). Les matrices $B(t)$ et $A(t)$ commutent-elles ?
3. On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{\lambda J} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En déduire que pour tous $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{B(t)} = \begin{pmatrix} e^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Vérifier que

$$\frac{d(e^{B(t)})}{dt} = A(t)e^{B(t)}$$

(c) Retrouver les solutions du système différentiel (S_2).

3.7 ($\star$) Un système différentiel à coefficients variables (3)

On considère le système différentiel

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{lllll} x' & = & (1+6t)x & + & -9ty \\ y' & = & 4tx & + & (1-6t)y \end{array} \right.$$

1. On se donne x et y des fonctions solutions du système différentiel (S_3). On pose $z = 2x - 3y$. Quelle équation différentielle vérifie la fonction z ?
2. En déduire les solutions du système différentiel (S_3).

4 Quelques équations fonctionnelles "exotiques"

4.1 ($\star\star$) Une équation pas tout à fait différentielle

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = f(-x) + e^x$$

4.2 ($\star\star$)

Déterminer l'ensemble des fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = f(1-x)$$

4.3 ($\star\star$) Morphismes dérivables de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

Déterminer l'ensemble des fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables non nulles, telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$