Outils Calculatoires

Correction de la feuille d'exercices 2

Institut Villebon-Charpak

Année 2017 - 2018

Exercice 1 ($\star$) **Forme géométrique**

$$u = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \qquad v = 2\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{3}} \qquad w = 3e^{i(5-\pi)} \qquad z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{23i\pi}{20}}$$

Remarque 0.1. *On a* $w = 3e^{i(5-\pi)} = 3e^{i(5+\pi)}$. *On a choisit* $5-\pi$ *comme argument pour être dans l'intervalle* $[0, 2\pi[$.

Exercice 2 ($\star\star$) **Somme d'exponentielles**

On a

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} &= e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{-i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} \right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \end{aligned}$$

On distingue deux cas selon le signe du cosinus.

— $\underline{\text{Si } \cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) \geq 0}$, alors

$$e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = \underbrace{\left[2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right]}_{\geq 0} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

On conclut donc que

$$\left|e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}\right| = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$$

et

$$\arg\left(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}\right) = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

— Si $\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) \geq 0$, alors

$$e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = -\left[-2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right] e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} = \underbrace{\left[-2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right]}_{\geq 0} e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\pi\right)}$$

On conclut donc que

$$\left|e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}\right| = -2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$$

et

$$\arg\left(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}\right) = \frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \pi$$

Exercice 3 (♡) Quelques formules de trigonométrie

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un réel et $z = e^{i\theta}$.

1. On a

$$\overline{z} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

et

$$\overline{z} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Donc en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

2. On a

$$-z = -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)} = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)$$

et

$$-z = -(\cos\theta + i\sin\theta) = -\cos\theta - i\sin\theta$$

Donc en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta) \qquad \sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$$

3. On a

$$iz = ie^{i\theta} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$iz = i(\cos\theta + i\sin\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta$$

Donc en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \qquad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$$

4. De même, en considérant $-\overline{z}$, on a $-\overline{z} = e^{i(\pi-\theta)} = \cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)$ d'une part, et $-\overline{z} = -\cos\theta + i\sin\theta$ d'autre part. On en déduit les formules

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \qquad \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$$

Enfin en considérant $i\overline{z}$, on a $i\overline{z} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)-\theta} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ d'une part, et $i\overline{z} = \sin\theta + i\cos\theta$ d'autre part. On a déduit les formules

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$$

Exercice 4 ($\star$) Racines carrées de nombres complexes

Caluler les racines carrées des nombres complexes suivants Les solutions sont

$$\pm(4+3i), \qquad \pm(1-4i), \qquad \pm(3-2i), \qquad \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

A titre d'exemple de rédaction, montrons comment on fait le calcul pour la racine carrée de $7+24i$. On cherche un complexe $z = a+ib$ tel que $z^2 = 7+24i$. On

$$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

donc on obtient le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 7 \\ 2ab &= 24 \end{cases}$$

On a donc $b = \frac{12}{a}$, et en l'injectant dans la première équation $a^2 - \frac{12^2}{a^2} = 7$ donc $0 = a^4 - 7a^2 - 12^2$. Posons $x = a^2$ et résolvons l'équation en x obtenue : $x^2 - 7x - 12^2 = 0$. On calcule son discriminant $\Delta = 7^2 + 24^2 = 625 = 25^2$. Donc $x = \frac{7 \pm 25}{2}$, c'est-à-dire $x = -9$ ou $x = 16$. Mais comme $x = a^2 \geq 0$, on peut exclure la solution -9, et il reste $x = a^2 = 16$. Donc $a = \pm 4$. Si $a = 4$, on trouve $b = 3$, et donc la racine $4+3i$. Si $a = -4$, on trouve $b = -3$, et donc la racine $-4-3i$. On peut aisément vérifier que ces solutions sont bien des racines.

Exercice 5 ($\star$) Equations quadratiques dans $\mathbb{C}$

1. Le discriminant de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$, vaut $\Delta = 1 - 4 = -3$, donc les solutions sont $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

2. L'équation $z^2 = 7 + 24i$ a été résolue dans l'exercice précédente les solutions sont $z = \pm(4 + 3i)$.
3. Le discriminant de l'équation $z^2 - (5 + 6i)z + 1 - 13i = 0$ est

$$\Delta = (5 + 6i)^2 - 4(1 - 13i) = (5^2 - 6^6 - 4) + i(2 \times 5 \times 6 + 4 \times 13) = -15 + 112i$$

Si $(a + ib)^2 = -15 + 112i$, on a alors

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & -15 \\ 2ab & = & 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b)(a + b) & = & -15 \\ ab & = & 7 \times 8 \end{cases}$$

On peut à nouveau se ramener à une équation quadratique comme dans les exercices précédents (le calcul un peu fastidieux donne l'équation $a^4 + 15a^2 - (56)^2$ qui mène à $a^2 = \frac{113-15}{2} = 49 = 7^2$), mais si on remarque que $15 = 7 + 8$ et $-1 = 7 - 8$, le système se résout à vue : on vérifie que $(a, b) = \pm(7, 8)$ sont solutions de ce système. Donc $\Delta = (7 + 8i^2)^2$, et les solutions de l'équation initiale sont $z = \frac{5+6i\pm(7+8i)}{2}$ c'est-à-dire $z = -1 - i$ ou $z = 6 + 7i$.

Exercice 6 (⋆⋆) Système somme-produit

1. Le discriminant du polynôme $z^2-(1+i)z+(2-i)$ vaut $\Delta = (1+i)^2-4(2-i) = -8+(2+4)i = -8+6i$. Calculons une racine carrée $a+ib$ de ce discriminant, on a $-8+6 = (a+ib)^2 = (a^2-b^2)+2iab$, donc

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b)(a + b) = -2 \times 4 \\ ab = 1 \times 3 \end{cases}$$

On peut résoudre ce système par la méthode calculatoire habituelle (en résolvant l'équation $a^4-8a^2-3^2 = 0$, qui donne $a^2 = \frac{-8\pm10}{2} = 1$ ou -9, donc $a = \pm1$), ou on peut aussi voir les solutions de ce système à vue : $(a, b) = (1, 3)$ ou $(a, b) = (-1, -3)$. Donc $-8 + 6i = (1 + 3i)^2$ et les solution de notre équation de départ sont $z = \frac{1+i\pm(1+3i)}{2}$, c'est-à-dire $z = 1 + 2i$ ou $z = -i$.

2. Rappelons la propriété suivante :

Lemme 0.2. *Les solutions de l'équation* $x^2 - ax + b = 0$ *sont exactement les solutions du système*

$$\begin{cases} u + v = a \\ uv = b \end{cases}$$

Démonstration. En effet, si λ_1, λ_2 sont les solutions du trinôme, alors on peut factoriser $x^2 - ax + b = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$ et en identifiant les coefficients, on a donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_1\lambda_2 = b \end{cases}$$

Réciproquement, si u et v sont des solution du système

$$\begin{cases} u+v=a \\ uv=b \end{cases}$$

alors en multipliant la première ligne par u, on a $u^2+uv=au$, donc $0=u^2-au+uv=u^2-au+b$. Ce qui veut bien dire que u est une racine de z^2-az+b. On fait de même avec v. $\square$

D'après le lemme, les solution du système $\begin{cases} u+v=1+i \\ uv=2-i \end{cases}$ sont donc le racines du polynômes $z^2-(1+i)z+(2-i)$ (dans un ordre interchangeable) c'est-à-dire $(u,v)=(1+2i,-i)$ ou $(u,v)=(-i,1+2i)$.

Exercice 7 ($\star\star$) Valeurs spéciales de $\cos$ **et** $\sin$

1. On pose $z=x+iy$, on a $(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy$ donc

$$\begin{cases} x^2-y^2=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2xy=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

on peut accéler la résolution du système en remarquant que $|z|^2=x^2+y^2=\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|=1$. Donc en sommant avec $x^2-y^2=\frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient $2x^2=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$, et $x^2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$, donc

$$x=\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

de même, en faisant la différence, on trouve $y^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$, et

$$y=\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Le signe est le même pour x et y (car leur produit vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$, qui est positif). En conclusion, il y a deux solutions

$$z=\pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

2. Comme $\frac{1+i}{\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}}$, l'équation de la question se réécrit $z^2=e^{i\frac{\pi}{4}}$, et ses solutions sont manifestement $z=\pm e^{i\frac{\pi}{8}}$. Il reste à savoir à laquelle des deux racines correspond $e^{i\frac{\pi}{8}}$. Comme $0\leq\frac{\pi}{8}\leq\frac{\pi}{4}$, alors $e^{i\frac{\pi}{8}}$ a ses parties réelles et imaginaires positives, on en déduit donc

$$e^{i\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

et donc finalement

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

3. Pour calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, il suffit de trouver une expression de la $z = e^{i\frac{\pi}{12}}$, qui est la racine carrée de $e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$. Donc résoudre l'équation $z^2 = (x+iy)^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

   On procède comme précédemment, on a $x^2+y^2 = 1$, et $x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc on tire

$$x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \qquad y = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

   Comme $0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{4}$, alors $e^{i\frac{\pi}{12}}$ est la racine qui a sa partie réelle et imaginaire positives, donc

$$e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

   et au final

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Remarque 0.3. *Une autre manière de calculer $e^{i\frac{\pi}{12}}$ consiste à remarquer que $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, donc*

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\pi}{12}} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\,[(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)] \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Donc on trouve

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Et même si ça ne saute pas aux yeux, on peut vérifier que ces expressions sont en fait bien égales à celle trouvées plus haut (elles sont positives et leurs carrés sont égaux) !

Exercice 8 ($\star\star\star$) Tangente de la somme

1. Le module de $1 + i\tan\theta$ est $1 + \tan^2\theta$, et son argument est θ.
2. Comme $\theta_1, \theta_2 \in [0, \frac{\pi}{4}[$, on a $\tan 0 = 0 \leq \tan\theta_1 < \tan\frac{\pi}{4} = 1$ (la fonction tangente est croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$). Et de même $0 \leq \tan\theta_2 < 1$. Donc on a l'encadrement
$$0 < 1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2 \leq 1$$
on a en particulier l'inégalité demandée.
3. Comme $0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, l'argument de $(1 + i\tan\theta_1)$ est θ_1. De même, comme $0 \leq \theta_2 < \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, l'argument de $(1+i\tan\theta_2)$ est θ_2. Donc l'argument de $(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)$ est $\theta_1+\theta_2 \in [0, \pi/2[$. Par ailleurs, le produit vaut
$$(1 + i\tan\theta_1)(1 + i\tan\theta_2) = (1 - \tan\theta_1\tan\theta_2) + i(\tan\theta_1 + \tan\theta_2)$$
Comme $\tan\theta_1 + \tan\theta_2 \geq 0$, l'argument de ce complexe vaut $\arctan\left(\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}\right)$. Cette valeur est également dans l'intervalle $[0, \pi/2[$ car l'arctangente prend des valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$ et que l'argument est positif ou nul.
On peut identifier donc égaliser les deux arguments
$$\theta_1 + \theta_2 = \arctan\left(\frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1\tan\theta_2}\right)$$
en prenant la tangente (ce qui est possible car on a des valeurs dans $[0, \pi/2[$), on trouve
$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1\tan\theta_2}$$

Exercice 9 ($\star\star\star$) Formule de Machin

1. On a
$$\begin{aligned}
\frac{(5+i)^4}{239+i} &= \frac{(5^4 + 4\times 5^3 i - 6\times 5^2 - 4i5 + 1)(239 - i)}{239^2+1} \\
&= \frac{[(5^4 - 6.5^2 + 1) + i(4\times 5^3 - 4\times 5)(]239 - i)}{239^2+1} \\
&= \frac{[476 + i480](239 - i)}{239^2+1} \\
&= \frac{2[(239 - 1) + i(239 + 1)](239 - i)}{239^2+1} \\
&= 2 \times \frac{239^2 - \cancel{239} + i239^2 + \cancel{i239} - \cancel{i239} + i + \cancel{239} + 1}{239^2+1} \\
&= 2 \times \frac{(239^2+1) + i(239^2+1)}{239^2+1} \\
&= 2(1+i)
\end{aligned}$$

2. Un argument de $(5+i)$ est $\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$. De même, un argument de $239+i$ est $\arctan(239)$. Donc un argument de $\frac{(5+i)^4}{239+i}$ est $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.
Or, comme c'est $2(1+i)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, un argument de ce nombre est aussi $\frac{\pi}{4}$. On a déduit que
$$\frac{\pi}{4}\equiv 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \mod 2\pi$$
c'est-à-dire qu'il existe un entier $k\in\mathbb{Z}$, tel que
$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+2k\pi$$
Pour montrer que $k=0$, il suffit d'avoir une valeur approché de $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ assez grossière (on a une marge d'erreur de 2π !). Pour ce faire, on peut par exemple regarder une valeur approchée sur calculatrice, ou si l'on en a pas à disposition, on peut utiliser que pour $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, on a
$$\frac{\pi}{4}\theta\le\arctan\theta\le\theta$$
(on peut faire un dessin pour le voir aisément) et donc
$$0\le\frac{\pi}{5}-\frac{1}{239}\le 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\le\frac{4}{5}-\frac{\pi}{239\times 4}\le\frac{4}{5}$$
Donc on peut conclure à l'égalité
$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Exercice 10 ($\star\star\star$) Somme de sinusoïdes

On considère la quantité $(a-ib)e^{ix}$. On note le $(a-ib)$ sous forme géométrique $a-ib=\rho e^{i\theta_{a,b}}$ avec $\rho>0$ et $\theta_{a,b}\in[0,2\pi[$. On a d'ailleurs $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$. On peut écrire alors
$$(a-ib)e^{ix}=\rho e^{i(x+\theta_{a,b})}=\rho\cos(x+\theta_{a,b})+i\sin(x+\theta_{a,b})$$
On a par ailleurs
$$(a-ib)e^{ix}=(a-ib)(\cos x+i\sin x)=(a\cos x+b\sin x)+i(a\sin x-b\cos x)$$
Donc en identifiant les parties réelles, on trouve
$$a\cos x+b\sin x=\rho\cos(x+\theta_{a,b})=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\theta_{a,b})$$
En bonus, si on identifie les parties imaginaires, on obtient une seconde identité (qui n'était pas demandée)
$$a\sin x-b\cos x=\rho\cos(x+\theta_{a,b})=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta_{a,b})$$

Remarque 0.4. *La moralité de cette exercice, est qu'une somme de signaux sinusoïdaux est encore sinusoïdal.*