Outils Calculatoires
Feuille d'exercice 2

Institut Villebon-Charpak

Année 2017 - 2018

Exercice 1 ($\star$) Forme géométrique

Mettre sous forme géométrique $\rho e^{i\theta}$ (avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$) les nombres complexes suivants

$$u = 1 + i \qquad v = 3i + \sqrt{3} \qquad w = -e^{\ln(3)+5i} \qquad z = \frac{-e^{\frac{2i\pi}{5}}}{1+i}$$

Solution : $u = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ $\qquad v = 2\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{3}}$ $\qquad w = 3e^{i(5-\pi)}$ $\qquad z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{23i\pi}{20}}$

Exercice 2 ($\star\star$) Somme d'exponentielles

Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Quel est le module et l'argument de $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$?

Indication : On pourra factoriser par $e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$ et discuter selon le signe de $\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$.

Exercice 3 ($\heartsuit$) Quelques formules de trigonométrie

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un réel et $z = e^{i\theta}$.

1. Exprimer $\overline{z}$ sous forme géométrique et algébrique. En déduire les formules

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

2. Exprimer $-z$ sous forme géométrique et algébrique. En déduire les formules

$$\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta) \qquad \sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$$

3. Exprimer iz sous forme géométrique et algébrique. En déduire les formules

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \qquad \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$$

4. Adapter la méthode pour montrer les formules

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta) \qquad \sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$$

et

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin(\theta) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos(\theta)$$

Exercice 4 ($\star$) Racines carrées de nombres complexes

Caluler les racines carrées des nombres complexes suivants

$$z_1 = 7+24i, \qquad z_2 = -15-8i, \qquad z_3 = 5-12i, \qquad z_4 = i,$$

Solution : $\pm(4+3i)$, $\qquad \pm(1-4i)$, $\qquad \pm(3-2i)$, $\qquad \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Exercice 5 ($\star$) Equations quadratiques dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$z^2 + z + 1 = 0 \qquad z^2 = 7 + 24i \qquad z^2 - (5+6i)z + 1 - 13i = 0$$

Solution :

$$\left\{ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \qquad \{4+3i, -4-3i\} \qquad \{-1-i, 6+7i\}$$

Exercice 6 ($\star\star$) Système somme-produit

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + (2-i) = 0$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ du système $\begin{cases} u + v = 1 + i \\ uv = 2 - i \end{cases}$.

Solution : $(u, v) = (1 + 2i, -i)$ ou $(u, v) = (-i, 1 + 2i)$

Exercice 7 ($\star\star$) Valeurs spéciales de $\cos$ et $\sin$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. On donnera les solutions sous forme algébrique et géométrique.
2. En déduire
$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$
3. Adapter la méthode pour trouver les formules
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Exercice 8 ($\star\star\star$) Tangente de la somme

1. Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Quel est le module et l'argument de $1 + i\tan\theta$?
2. Soient $\theta_1, \theta_2 \in [0, \frac{\pi}{4}[$. Montrer que $1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2 > 0$.
3. Calculer de deux manières l'argument de $(1 + i\tan\theta_1)(1 + i\tan\theta_2)$. En déduire la formule
$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

Exercice 9 ($\star\star\star$) Formule de Machin

1. Calculer $\frac{(5+i)^4}{239+i}$.
2. En déduire la formule suivante (découverte par John Machin en 1706) :
$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Exercice 10 ($\star\star\star$) Somme de sinusoïdes

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels. Montrer qu'il existe $\theta_{a,b} \in [0, 2\pi[$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x + \theta_{a,b})$$

Indication : On pourra considérer $(a - ib)e^{ix}$ et l'exprimer sous forme algébrique et géométrique.