Outils Calculatoires

Correction de la feuille d'exercices 1

Institut Villebon-Charpak

Année 20017 - 2018

1 Forme algébrique, conjugaison

1.

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{2}{1-i\sqrt{3}} \\ &= -\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1+3} \\ &= -\frac{2(1+i\sqrt{3})}{4} \\ &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Remarque 1.1. *On pouvait procéder autrement en reconnaissant qu'on a à faire à l'inverse du complexe j. En effet, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, donc $z_1 = \frac{1}{j} = \overline{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{1}{(1+2i)(3-i)} \\
&= \frac{1}{3+2+6i-i} \\
&= \frac{1}{5+5i} \\
&= \frac{5-5i}{5^2+5^2} \\
&= \frac{1-i}{10}
\end{aligned}$$

Remarque 1.2. *On peut déduire de ce calcul, une belle identité avec des arctangentes (due à Euler). En effet, l'argument de* $(1+2i)$ *est* $\arctan(2) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$*, et l'argument de* $3-i$ *est* $\arctan\left(-\frac{1}{3}\right) = \arctan(-3) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$*, et celui de* $1-i$ *est* $-\frac{\pi}{4}$ *donc on en déduit l'identité*

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
z_3 &= \frac{1+3i}{1-3i} \\
&= \frac{(1+3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} \\
&= \frac{(1-3^2)+6i}{1+3^2} \\
&= \frac{-8+6i}{10} \\
&= -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i
\end{aligned}$$

Remarque 1.3. *Comme le nombre* z_3 *est sous la forme* $z/\overline{z}$ *(avec* $z = 1+3i$*), alors on pouvait savoir du début qu'il doit être de module* 1 *(car* $|z/\overline{z}| = |z|/|\overline{z}| = 1$*). Et en effet on peut vérifier que le module de notre résultat est* $\frac{4^2+3^2}{5^2} = 1$.

$$\begin{aligned}
z_4 &= \left(\frac{1+2i}{1+i}\right)^2 \\
&= \frac{1-4+4i}{1-1+2i} \\
&= \frac{-3+4i}{2i} \\
&= \frac{(-3+4i)(-i)}{2i.(-i)} \\
&= 2 + \frac{3}{2}i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_5 &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\
&= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{1-3-2i\sqrt{3}}{4} \times \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} \times \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \times \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1+3}{2\times 2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Remarque 1.4. *En reconnaissant que* $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, *on pouvait aussi calculer que* $z_5 = j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}\times 3} = e^{2i\pi} = 1$.

$$\begin{aligned}
z_6 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 + 2i\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}} \\
&= 2+\sqrt{2} - (2-\sqrt{2}) + 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\
&= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{4-2} \\
&= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} \\
&= 2\sqrt{2}(1+i)
\end{aligned}$$

Remarque 1.5. *En remarquant que* $z_6 = 4.\frac{1+i}{\sqrt{2}} = 4e^{\frac{i\pi}{4}} = \left(2e^{\frac{i\pi}{8}}\right)^2$. *On peut en déduire la formule*

$$e^{\frac{i\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(comme $\sqrt{2+\sqrt{2}} > 0$ *on sait à quelle racine carrée de* z_6 *on a à faire).*

2. Si $z = x+iy$, alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, et donc

$$z^2 + z + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + i(2xy + y) = (x^2 - y^2 + x + 1) + iy(2x+1)$$

Dire que cette quantité est réelle équivaut à dire que sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire que $y(2x+1) = 0$. Ce qui équivaut à dire $y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$. Dans le plan complexe, cela représente deux droites (l'axe réel et la droite verticale des complexes de partie imaginaire $-\frac{1}{2}$).

2 Réprésentation de l'axe imaginaire

Nous donnons quatre preuves différentes de ce résultat.

1. **Preuve algébrique :** Comme $|z| = 1$, on peut écrire $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ où x, y vérifient $x^2 + y^2 = 1$. Exprimons la quantité $\frac{z+1}{z-1}$ sous forme algébrique. On a

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} &= \frac{(x+1)+iy}{(x-1)+iy} \\
&= \frac{[(x+1)+iy].[(x-1)-iy]}{(x-1)^2+y^2} \\
&= \frac{(x+1)(x-1)+y^2-iy(x+1-x+1)}{x^2+y^2+1-2xy} \\
&= \frac{x^2+y^2-1-i2y}{2(1-xy)} \\
&= i\frac{y}{xy-1}
\end{aligned}$$

ce qui est manifestement imaginaire pur.

2. **Preuve géométrique :** Comme $|z| = 1$, on peut écrire $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ (on sait que θ n'est pas multiple de 2π car $z \neq 1$). On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} &= \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} \\
&= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\
&= \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= -i\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

où on $\cot = \frac{1}{\tan}$ désigne la fonction cotangente. La quantité est donc bien imaginaire pure.

3. **Une preuve élégante :** On rappelle qu'une quantité complexe $u \in \mathbb{C}$ est imaginaire pure si et

seulement si $\overline{u} = u$. On calcule donc le conjugué de $\frac{z+1}{z-1}$. On a

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} &= \frac{\overline{(z+1)}}{\overline{(z-1)}} \\ &= \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \\ &= \frac{z(\overline{z}+1)}{z(\overline{z}-1)} \\ &= \frac{|z|^2+z}{|z|^2-z} \\ &= \frac{1+z}{1-z} \\ &= -\frac{z+1}{z-1}\end{aligned}$$

Donc la quantité $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pure.

4. **Une interprétation géométrique :** Si A, B et M désignent les point d'affixe -1, 1 et z respectivement, alors la quantité $\frac{z+1}{z-1}$ a pour argument l'angle (algébrique) formé par les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$. On rappelle également une propriété du cercle : l'ensemble des points M tels que le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ est nul est le cercle de diamètre $[AB]$ (on peut par exemple le vérifier en écrivant l'équation cartésienne obtenue en écrivant que le produit scalaire est nul, et reconnaître l'équation du cercle).

   Si $|z| = 1$, alors M est sur le cercle de diamètre $[AB]$. D'après la propriété du cercle, on a donc que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ forment un angle droit, donc la quantité $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pure.

   En fait, vu que l'ensemble des points M tels que le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ est nul est exactement le cercle de diamètre $[AB]$, la quantité $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pure exactement quand $|z| = 1$ et jamais ailleurs.

3 Descriptions géométriques

1. On a $\{z \in \mathbb{C}, |z-3+4i| = 5\} = \{z \in \mathbb{C}, |z-(3-4i)| = 5\}$. Le point z est donc l'ensemble si et seulement si sa distance au point $3-4i$ est 5. En d'autres termes, l'ensemble est le cercle de centre $3-4i$ et de rayon 5.

   Alternativement, on pourrait également retrouver ce résultat en écrivant $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, et en écrivant l'équation sur x et y qu'on obtient. En effet, on a $|z-3+4i| = 5 \Leftrightarrow |z-3+4i|^2 = 5^2$, ce qui donne

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 5^2$$

   Ce qui est l'équation cartésienne d'un cercle de centre $(3, -4)$ et de rayon 5.

2. On a $\{z \in \mathbb{C}, z + \overline{z} = 6\} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) = 3\} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}, x = 3\}$, donc l'ensemble correspond à la droite verticale d'abscisse 3.
3. Dire que $|z-1| = |z-i|$ signifie que z est équidistant des points 1 et i. L'ensemble des points qui vérifient cette propriété est la bissectrice du segment formé par ces deux point 1 et i.

   Là encore, on peut retrouver ce résultat à travers l'équation cartésienne. On écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Comme $|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow 0 = |z-1|^2 - |z-i|^2$, on a

$$0 = (x-1)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 2x - 2y$$

   Donc on trouve l'équation cartésienne de la droite $y = x$.

4 Une formule de trigonométrie

1.

$$\begin{aligned} e^{i\gamma} + 1 &= e^{i\frac{\gamma}{2}} \left(e^{i\frac{\gamma}{2}} + e^{-i\frac{\gamma}{2}} \right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{aligned}$$

On a donc $\left|e^{i\gamma}+1\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right|$. Pour l'argument, il faut séparer deux cas selon le signe de $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

— <u>Si $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq 0$</u>, alors $\left|e^{i\gamma}+1\right| = 2\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ et un argument de $e^{i\gamma}+1$ est $\frac{\gamma}{2}$.

— <u>Si $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) < 0$</u>, alors

$$e^{i\gamma} + 1 = -\left(-2\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) e^{i\frac{\gamma}{2}} = \underbrace{\left(-2\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)}_{>0} e^{i\left(\frac{\gamma}{2}+\pi\right)}$$

et donc un argument de $e^{i\gamma}+1$ est $\frac{\gamma}{2} + \pi$

De même pour $e^{i\gamma} - 1$ on peut écrire

$$\begin{aligned} e^{i\gamma} - 1 &= e^{i\frac{\gamma}{2}} \left(e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{-i\frac{\gamma}{2}} \right) \\ &= 2i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\frac{\gamma}{2}} \\ &= 2\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) e^{i\frac{\gamma+\pi}{2}} \end{aligned}$$

On a donc $\left|e^{i\gamma}-1\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right|$ et

$$\arg\left(e^{i\gamma}-1\right) = \begin{cases} \frac{\gamma+\pi}{2} & \text{si } \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{\gamma+3\pi}{2} & \text{si } \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

2. Soit $z \neq 1$ un complexe. Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété :
$$1 + z + \dots z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$
Au rang $n = 0$, l'égalité est évidente et s'écrit $1 = \frac{z-1}{z-1}$.
Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n, et on veut la montrer pour le rang $n+1$. Considérons donc la somme $1 + z + z^2 + \dots z^n + z^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, on peut écrire
$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + \dots z^n + z^{n+1} &= \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} + z^{n+1} \\ &= \frac{z^{n+1} - 1 + z^{n+1}(z-1)}{z - 1} \\ &= \frac{z^{n+1} - 1 + z^{n+2} - z^{n+1}}{z - 1} \\ &= \frac{z^{n+2} - 1}{z - 1} \end{aligned}$$
ce qui est bien la formule attendue. Donc notre propriété est finalement démontrée pour tout $n \geq 0$.

3. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$, alors $z = e^{i\theta}$ n'est pas égal à 1. On peut en particulier appliquer la formule de la question précédente, on obtient alors pour $n \geq 0$
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$
On peut transformer cette expression en utilisant le calcul de la question 1 :
$$\begin{aligned} \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} &= \frac{2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{n\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{n\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$
On a par ailleurs,
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i\sin(k\theta) = \left(\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)\right)$$
Donc en identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve les formules
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)\right) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

5 Angle triple

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

1. Sous forme géométrique on a $z^3 = \left(e^{i\theta}\right)^3 = e^{3i\theta}$. Et sous forme algébrique on a

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta \\ &= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right) \end{aligned}$$

2. En identifiant les parties réelles et imaginaires dans les deux expressions de z^3, on en déduit les relations

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

et

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

Souvent, on réécrit ses expressions pour qu'elles ne fassent apparaître que des cosinus ou des sinus en se servant de la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on obtient alors

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

et

$$\sin 3\theta = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

1. Exprimer z^3 sous forme algébrique et géométrique.
2. En déduire une expression de $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.