Outils Calculatoires

Type 1

Institut Villebon-Charpak

Année 2017 - 2018

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. Il est possible d'admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite. Les différentes parties sont indépendantes. Un barême est donné à titre indicatif.

1 Equations différentielles (4 points)

Résoudre les équations diffférentielles suivantes.

1. $y' + xy = 0$
2. $y'' + y' + y = 0$
3. $y'' - 4y' + 4y = e^x$
4. $y'' + y = \cos(x)$

2 Systèmes différentiels homogènes (4 points)

Résoudre les systèmes différentiels suivants. Dans chacun des cas, on précisera la dimension de l'espace des solutions et on donnera une base de cet espace.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & + & y \\ y' & = & x & - & y \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & 2x & + & y \\ y' & = & -x & + & 2y \end{array}\right.$

3 Interpolation polynômiale (14 points)

Le but de ce problème est d'étudier le problème d'interpolation polynoniale : étant donnés des points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$ dans le plan (avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$), peut-on trouver une polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré au plus n dont le graphe passe par tous ces points, (c'est-à-dire vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$) ?

3.1 Pour deux points (3 points)

1. (a) Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_1[X]$ de degré ≤ 1 dont le graphe passe par les points $(0, 2)$ et $(3, 5)$, c'est-à-dire tel que $P(0) = 2$ et $P(3) = 5$. Faites un dessin du graphe de P (sur lequel figure les deux points).

   (b) Résoudre l'équation différentielle suivante $y'' = 0$ avec les conditions $y(0) = 2$ et $y(3) = 5$?

2. On se donne deux points du plan $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_0 < x_1$. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_1[X]$ de degré ≤ 1 tel que $P(x_0) = y_0$ et $P(x_1) = y_1$.

3.2 Pour trois points (7 points)

1. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de degré ≤ 2 dont le graphe passe par les points $(-1, 6)$, $(1, 2)$ et $(2, 3)$. Faites un dessin du graphe de P (sur lequel figure les trois points).

2. On considère la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer l'inverse de A.

   (b) En déduire que pour tous $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de degré ≤ 2 dont le graphe passe par les points $(-1, y_0)$, $(0, y_1)$ et $(1, y_2)$, et exprimer les coefficients de P en fonction de y_0, y_1 et y_2.

3. Soient $x_0 < x_1 < x_2$ trois réels distincts, on considère la matrice
$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que

$$\det(V) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) > 0$$

En déduire que V est inversible (on ne demande pas le calcul de l'inverse).

(b) En déduire qu'étant donnés trois points distincts du plan (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec $x_0 < x_1 < x_2$, il existe une unique parabole qui passe par ces trois points.

3.3 Cas général (4 points)

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}$, et on se donne $n+1$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$ dans le plan avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(x_0), P(x_1), \dots P(x_n)) \end{aligned}$$

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré $\leq n$. Montrer que si $P(x_i) = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$, alors $P = 0$. *Indication : On pourra commencer par montrer que $(X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_n)$ divise P.*
3. En déduire que l'application f est injective.
4. Conclure qu'il existe unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dont le graphe passe par les points (x_i, y_i) pour $0 \leq i \leq n$ (on ne demande pas d'exprimer P).