Mathématiques Générales 1
Feuille d'exercice 2

Institut Villebon-Charpak

Année 2017 - 2018

Dans cette feuille, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

0.1 Espaces vectoriels (ou pas)

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier votre réponse.

1. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy - y - 2x + 2 = 0\right\}$
2. $\{P \in \mathbb{C}[X], \deg(P) \leq 3\}$
3. $\left\{P \in \mathbb{C}[X], \exists Q \in \mathbb{C}[X], P = (X^2+1)Q\right\}$
4. $\{z \in \mathbb{C}, e^z = 1\}$
5. $\{f \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{C}), \exists M \geq 0, \forall x \in [0,1], |f(x)| \leq M\}$
6. $\left\{f \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{C}), \exists a,b \in \mathbb{C}, \forall x \in [0,1], f(x) = ax + b\sqrt{1+x}\right\}$
7. $\left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{C}), f''(1) + 3f'(\pi) - 5f(10) = 0\right\}$
8. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}), \lim_{n\to\infty} u_n = 0\}$
9. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_n\}$
10. $\left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2x)\right\}$
11. $(\star)$ $\left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 = \int_0^1 f(t)^2 dt\right\}$

1 Changements de base

1.1 Dans $\mathbb{R}^3$

Soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x,y,z) = (-3x - 5y - 3z, 3x + 5y + 2z, -x - 2y + z)$$

1. Écrire la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = ((-1,1,2), (0,-1,1), (1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique. En déduire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

1.2 Symétries axiales

On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}^2$.

1. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ une droite dans le plan. Montrer que la symétrie par rapport à l'axe D est une application linéaire si et seulement si D passe par l'origine.
2. Ecrire la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport a l'axe d'équation $y = 0$.
3. Même questions pour les symétries d'axe $x = 0$, $y = x$, $y = 2x$.
4. Montrer que ces matrices sont diagonalisables. Que représentent géométriquement les espace propres associés à 1 et -1 ?

1.3 Rotations dans le plan

On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}^2$.

1. Ecrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de centre $(0, 0)$.
2. Diagonaliser cette matrice dans $\mathbb{C}$.

1.4 Un projecteur

Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $p(x, y) = \frac{1}{2}.(x + y, x + y)$.

1. Écrire la matrice de l'endomorphisme p dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que $p^2 = p$.
3. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Écrire la matrice M de p dans la base $\mathcal{B}$, en déduire que p est diagonalisable. Vérifier que $M^2 = M$.

1.5 Polynômes

On considère les polynômes

$$f_1(X) = 2X^2 + 1 \qquad f_2(X) = X^2 + X \qquad f_3(X) = X + 3$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On note $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Ecrire la matrice de passage $P = \mathrm{mat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_0)$. En déduire la matrice $\mathrm{mat}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B})$.
3. On considère les polynômes

$$A(X) = 3X^2 + 2X + 1 \qquad B(X) = 3X^2 + 2X + 4 \qquad C(X) = 2X^2 + X + 4$$

   Exprimer A, B et C dans la base $\mathcal{B}$.

1.6 ($\star$) Polynômes de Lagrange

On définit les polynômes

$$L_1(X) = \frac{(X-2)(X-3)}{2} \qquad L_2(X) = -\frac{(X-1)(X-3)}{2} \qquad L_3(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$$

On considère l'application $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par

$$u(P) = (P(1), P(2), P(3))$$

1. Montrer que u est une application linéaire. Justifier que u est injective. En déduire que c'est un isomorphisme.
2. On note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que $u(L_i) = e_i$ pour $1 \leq i \leq 3$. En déduire que $\mathcal{L} = (L_0, L_1, L_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Indication : On pourra utiliser que l'image d'une base par un isormophisme est une base.
3. On note $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Exprimer la matrice $\mathrm{mat}(\mathcal{L}, \mathcal{B}_0)$.
4. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base $\mathcal{L}$ (on exprimera le résultat en fonction des nombres $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$).
5. En déduire l'inverse de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

1.7 ($\star$) Suites de Fibonacci

On considère l'ensemble

$$E = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0\}$$

On note $e = (e_n)_{n\geq 0}, f = (f_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ les suites définies par récurrence par

$$e_0 = 1, f_0 = 0 \qquad e_1 = 0, f_1 = 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$e_{n+2} = e_{n+1} + e_n \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $e, f \in E$, et que la famille $\mathcal{B}_0 = (e, f)$ forme une base de E. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ quelles sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}_0$?
3.
4. Factoriser le polynôme $P = X^2 - X + 1$. Dans la suite on note $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sont les racines de P. Montrer que $\mathcal{G} = ((x_1^n)_{n\geq 0}, (x_2^n)_{n\geq 0})$ est une base de E.
5. On considère l'application $\sigma : E \to E$ définie pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ par $\sigma(u)_n = u_{n+1}$.
   (a) Vérifier que pour $u \in E$, $\sigma(u) \in E$.
   (b) Écrire la matrice de σ dans la base $\mathcal{B}_0$.
   (c) Écrire la matrice de σ dans la base $\mathcal{G}$.

2 Diagonalisation

2.1 Calculs

Diagonaliser les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Calculs (2)

Diagonaliser les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -14 & -21 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 77 & -60 \\ 100 & -78 \end{pmatrix}$$

2.3 Calculs (3)

Diagonaliser les matrices suivantes si cela est possible

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4 Permutation circulaire

On considère l'application $a : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}$ par $u(x, y, z) = (y, z, x)$.

1. Écrire la matrice A de l'endomorphisme a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer a^2 et a^3. En déduire que $A^3 - I_3 = 0$.
3. Diagonaliser A.

2.5 Sinusoïdes

Soit $\omega \in \mathbb{R}$ un réel. On considère l'ensemble

$$E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \exists a, b \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)\}$$

Et on considère les applications $D : E \to E$ définie pour tout $f \in E$ par $D(f) = f'$.

1. Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathcal{T} = (x \mapsto \cos(\omega w), x \mapsto \sin(\omega x))$ est une base de E, en déduire que $\dim E = 2$.
3. Montrer que $\mathcal{E} = (x \mapsto e^{i\omega x}, x \mapsto e^{-i\omega x})$ est une base de E.
4. Ecrire les matrices de passage $\mathrm{mat}(\mathcal{E}, \mathcal{T})$ et $\mathrm{mat}(\mathcal{T}, \mathcal{E})$.
5. Montrer que si $f \in E$, alors $f' \in E$.
6. Montrer que l'application D est linéaire. Ecrire la matrice de D dans la base $\mathcal{T}$ et la base $\mathcal{E}$.
7. En déduire que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$$

   est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et expliciter une diagonalisation.

2.6 Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) &\longmapsto \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ M &\longrightarrow AM \end{aligned}$$

1. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
2. L'endorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Quelle relation matricielle avons-nous prouvé ?

2.7 Un endomophisme de $\mathbb{R}_3[X]$

Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini pour tout polynôme $P = a_3X^2+a_2X^2+a_1X+a_0$ par

$$f(P) = (a_0 + 2a_1 - 2a_2 - a_3)x^3 + (a_2 - a_1)x^2$$

1. Ecrire la matrice U de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Quel est le rang de U ? Qu'en déduisez-vous ?
3. Calculer U^2 et U^3, et en déduire $U^3 - U$.
4. La matrice U est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonalisez la.

2.8 $(\star)$

On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de M ?
2. En déduire que 0 est valeur propre de M.
3. Déterminer une base de $E_0(M) = \ker(M)$.
4. Combien reste-t-il de valeur propres à trouver ? Les déterminer.
5. La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

2.9 $(\star)$

On considère la matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice qui a des 1 sur toutes les coordonnées :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer H^2. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(H) = 0$.
2. En déduire que les valeurs propres de H sont 0 et n.
3. Donner la dimension et une base de $E_n(H) = \ker(H - n.I_n)$.
4. Donner la dimension et une base de $E_0(H) = \ker(H)$.
5. Déduire que H est diagonlisable et expliciter une diagonalisation.

2.10 ($\star\star$) Une annale (Centrale 2002)

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel avec $n \geq 3$. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de M ?
2. En déduire que 0 est valeur de M. Quel est sa multiplicité ?
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A.
   (a) Si $(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, que vaut $f(x_1, \dots, x_n)$?
   (b) Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Soit $g = f_{|\,\mathrm{Im}(f)}$ la restriction de f à l'espace $\mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire que g est défini de la manière suivante

   $$\begin{aligned} g : \mathrm{Im}(f) &\longrightarrow \mathrm{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

   Écrire la matrice N de g dans la base de $\mathrm{Im}(f)$ trouvé précedemment. Trouver les valeurs propre de g.
4. En déduire toutes les valeurs propres de M.

3 Exponentielles de matrices

3.1 Matrice de rotation

On considère la matrice

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice I.
2. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{\theta . I} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

3. En déduire que pour tous $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

   En calculant le produit matriciel, retrouver les formules pour $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ et $\sin(\theta_1 + \theta_2)$.

3.2 Trigonométrique hyperbolique

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice A.
2. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{t.A} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$$

   où $\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ et $\mathrm{sh}(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$.
3. En déduire que pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t_1) & \mathrm{sh}(t_1) \\ \mathrm{sh}(t_1) & \mathrm{ch}(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t_2) & \mathrm{sh}(t_2) \\ \mathrm{sh}(t_2) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t_1+t_2) & \mathrm{sh}(t_1+t_2) \\ \mathrm{sh}(t_1+t_2) & \mathrm{ch}(t_1+t_2) \end{pmatrix}$$

   et tirer des formules pour $\mathrm{ch}(t_1+t_2)$, et $\mathrm{sh}(t_1+t_2)$ en fonction de $\mathrm{ch}(t_1)$, $\mathrm{ch}(t_2)$, $\mathrm{sh}(t_1)$ et $\mathrm{sh}(t_2)$

3.3 Une matrice nilpotente

On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $N^2 = 0$.
2. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{tN} = I_2 + tN = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 ($\star$) Matrices nilpotentes

Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2 et J^3. En déduire que $J^n = 0$ pour tout $n \geq 3$.
2. Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{t.J} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.J^n = I_3 + t.J + \frac{t^2}{2}.J^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & \frac{y^2}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y & \frac{(x+y)^2}{2} \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. ($\star\star$) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{t.J_n} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & & & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. En appliquant $e^{x.J_{n+1}} e^{y.J_{n+1}} = e^{(x+y).J_{n+1}}$, retrouver la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$