Mathématiques Générales 1
Feuille d'exercice 1

Institut Villebon-Charpak

Année 2017 - 2018

Dans cette feuille, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels (ou pas)

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4,\ x - z - 2y = t\}$
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y, z - 2y = 0\}$
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 1 + y, z - 2y = 0\}$
4. $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ a + b + c \geq 0\}$
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists t \in \mathbb{R}, x = \cos(t),\ y = \sin(t)\}$
6. $\{A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = 0\}$
7. $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = 0\}$
8. $\{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ y' - 4y = \cos\}$
9. $\{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ y'' - 2y' + y = 0\}$
10. $\left\{y \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}),\ y^{(4)} + y^{(2)} + y = 0,\ y'(1) = 0\right\}$
11. $\{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ y' = y^2\}$
12. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)\}$
13. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(-t) = f(t)\}$
14. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t + 2\pi) = f(t)\}$
15. $(\star)$ $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists T > 0, \forall t \in \mathbb{R},\ f(t + T) = f(t)\}$
16. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(0) = 1\}$
17. $\left\{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\right\}$

18. $\left\{(u_n, v_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2v_n, v_{n+1} = v_n - 2u_n\right\}$
19. $\left\{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}\right\}$
20. $\left\{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0\right\}$
21. $\left\{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \exists l \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} u_n = l\right\}$
22. $\left\{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n\right\}$
23. $(\star)$ $\left\{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n\right\} \bigcup \left\{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n\right\}$

2 Liberté des familles

Etudier la liberté des familles suivantes (dans leurs espaces respectifs).

1. $((-1, 1), (1, 1))$
2. $((1, x), (x, 1))$ où $x \in \mathbb{R}$
3. $((1, 2, 2), (-1, 0, 3), (0, -2, 2))$
4. $((1, 2, 3, 4), (4, 1, 2, 3), (3, 4, 1, 2), (2, 3, 4, 1))$
5. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$
6. $\left(\begin{pmatrix} 5+5i \\ 1+3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
7. $(\star)$ $((1, 1, 1, 1, 1),\ (1, 2, 2^2, 2^3, 2^4),\ (1, 3, 3^2, 3^3, 3^4),\ (1, 4, 4^2, 4^3, 4^4),\ (1, 5, 5^2, 5^3, 5^4))$

3 $(\star\star)$ Liberté de famillles de fonctions

Etudier la liberté des familles de fonctions suivantes (dans leurs espaces respectifs).

1. $(\cos, \sin)$
2. $(x \mapsto \cos(x + \varphi))_{\varphi \in [0, 2\pi[}$
3. $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $(x \mapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$
5. $(x \mapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$
6. $(x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$
7. $(\star)$ $(x \mapsto \cos(x^n))_{n\in\mathbb{N}}$
8. $(\star\star)$ $(x \mapsto |x - \alpha|)_{\alpha\in\mathbb{R}}$

4 ($\star$) Barycentre

Soit E un K-espace vectoriel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de E. On se donne $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ de scalaires, et on pose $e \in E$, la combinaison linéaire

$$e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . u_i$$

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit v_i par $v_i = u_i - e$.

1. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

2. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

5 Combinaisons linéaires

1. Ecrire le vecteur $(1, 2, -5)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ et $e_3 = (2, -1, 1)$.
2. Pour quelles valeurs de k le vecteur $u = (1, -2, k)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $v = (3, 0, 2)$ et $w = (2, -1, -5)$?

6 Matrice d'une application linéaire

Ecrire les matrices des applications linéaires suivantes dans leurs bases canoniques respectives

1. $s_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y, x) \in \mathbb{R}^2$
2. $s_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, -y) \in \mathbb{R}^2$
3. $p : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a, 0) \in \mathbb{R}^2$
4. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x + 2y + z \in \mathbb{R}$
5. $g : (r, s, t, u, v) \in \mathbb{R}^5 \mapsto (3r - 2s, r - t - v, s + 4t - 3u) \in \mathbb{R}^3$
6. $h : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (a + b, b + c, a + c) \in \mathbb{R}^3$
7. $h \circ g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

7 Suites à récurrence linéaire

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ l'ensemble des suites à valeurs complexes. On pose

$$F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n\}$$

1. Montrer que F est sous-espace vectoriel de F.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1$. Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique et géométrique.
3. On note $f_1 = (\lambda_1^n)_{n\geq 0} \in E$ et $f_2 = (\lambda_2^n)_{n\geq 0} \in E$. Vérifier que $f_1, f_2 \in F$.
4. Montrer que (f_1, f_2) est une famille libre. En déduire que $\dim F \geq 2$
5. Montrer que l'application $\varphi : F \to \mathbb{C}^2$ définie par $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_0, u_1)$ est un injective. En déduire que $\dim F \leq 2$.
6. Conclure que $\dim F = 2$, et que (f_1, f_2) est une base de F.
7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, montrer qu'il existe des coefficients $a, b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$$
exprimer $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

8 Application linéaire, matrice et changement de base

1. Montrer que $\mathcal{B}_1 = ((1,0),(1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. On note $\mathcal{B}_0 = ((1,0),(0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Exprimer $\mathrm{mat}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0)$ et $\mathrm{mat}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $f(1,0) = (2,0)$ et $f(1,2) = (0,2)$. Que vaut $f(1,3)$?
4. Exprimer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0}(f)$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$.

9 Puissance de matrice et d'application linéaire

Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(x,y) = (x, x+y)$. On note U sa matrice dans la base canonique.

1. Calculer u^2, u^3, u^4 puis u^n pour tout $n \geq 0$.
2. Exprimer U. Calculer U^n pour tout $n \geq 0$.

Soit $v : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $(e_1, \dots e_6)$ est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculer v^2, v^3, $\dots v^6$ sur la base canonique. En déduire v^n (sur la base canonique) pour tout $n \geq 0$.
4. Calculer J^n pour tout $n \geq 0$.

10 Opérateur de translation sur les polynômes

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels, et $\mathbb{R}_3[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Soit $\sigma : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application linéaire définie par $\sigma(P)(X) = P(X+1)$.

1. Qu'appelle-t-on la base canonique de $\mathbb{R}[X]$? Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$?
2. Ecrire la matrice M de σ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Calculer σ^{-1}, la réciproque de σ. En déduire M^{-1}.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer σ^n. En déduire M^n.

11 Base

On considère l'espace $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$.

1. Montrer que l'application $f : (x, y, z) \to x + y + z$ est linéaire.
2. Que vaut $\ker f$, $\mathrm{Im}(f)$?
3. Justifier que E est un espace vectoriel.
4. Calculer $\dim E$ à l'aide du théorème du rang.
5. Montrer que la famille $(1, 0, -1)$, $(0, 1, -1)$ est une base de E.

12 ($\heartsuit$) Quelques propriétés des familles libres

Soit E un K-espace vectoriel.

1. Montrer qu'une famille de vecteurs qui contient le vecteur nul est liée.

2. Soit $e \in E$ un vecteur de E. Montrer que la famille contenant un seul vecteur (e) est libre si et seulement si $e \neq 0$.
3. Soient $e_1, e_2 \in E$, montrer que la famille (e_1, e_2) est liée si et seulement si e_1 et e_2 sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $e_2 = \lambda e_1$ ou $e_1 = \lambda e_2$.
4. Soit (e_1, e_2) une base de E, montrer que la famille $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ est aussi une base de E.

13 Dimension d'une somme directe

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $F, G \subset E$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que F et G sont en somme directe. Soient $\mathcal{F} = (f_1, \ldots f_r)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \ldots g_s)$ des familles de vecteurs de F et G respectivement.

1. On suppose que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont libres. Montrer que la concaténation $(f_1, \ldots f_r, g_1, \ldots g_s)$ des familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est libre.
2. On suppose que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ engendrent F et G respectivement. Montrer que la concaténation $(f_1, \ldots f_r, g_1, \ldots g_s)$ des familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ engendre $F \oplus G$.
3. On suppose que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des bases de F et G respectivement. Montrer que la concaténation $(f_1, \ldots f_r, g_1, \ldots g_s)$ des familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est une base de $F \oplus G$. En déduire la formule
$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

14 ($\star\star$) Espace vectoriel quotient

Soit E un K-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Pour $e \in E$ on note
$$[e]_F = e + F = \{e + f, f \in F\}$$
Et on définit l'ensemble
$$E/F = \{e + F, e \in E\}$$
appelé espace quotient de E par F.

1. Vérifier que $[e]_F = [e']_F$ si et seulement si $e - e' \in F$.
2. Soient $e_1, e'_1, e_2, e'_2 \in E$ et $\lambda \in K$ tels que $[e_1]_F = [e'_1]_F$ et $[e_2]_F = [e'_2]_F$. Montrer que
$$[\lambda.e_1]_F = [\lambda.e'_1]_F \qquad [e_1 + e_2]_F = [e'_1 + e'_2]_F$$
3. On définit sur E/F les opérations (ce qui est autorisé par la question précédente)
$$[e_1]_F + [e_2]_F = [e_1 + e_2]_F \qquad \lambda.[e_1]_F = [e_1]_F$$
vérifier que ces opérations munissent E/F d'une structure d'espace vectoriel.

4. On définit l'application $s : E \to E/F$ définie par $s(e) = e + F$. Montrer que s est une application linéaire surjective, avec $\ker(s) = F$. En déduire en applicant le théorème du rang que
$$\dim E/F = \dim E - \dim F$$

15 ($\heartsuit$) Famille de vecteurs et applications linéaires

Soit $u : E \to F$ une application linéaire, et $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E.

1. On suppose que u est injective, et que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Montrer que la famille $u(\mathcal{F}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille libre de F.
2. On suppose que u est surjective, et que la famille $\mathcal{F}$ est une génératrice de E. Montrer que la famille $u(\mathcal{F}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille génératrice de F.
3. On suppose que u est bijective, et que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E. Montrer que la famille $u(\mathcal{F}) = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base de F.

16 ($\star\star$) Union d'espaces vectoriels

Soit E un K-espace vectoriel. Soient $A, B \subset E$ deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'alors $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Remarque 16.1. *Cet exercice précise l'affirmation faite en cours que "l'union d'espaces vectoriels n'est en général pas un espace vecotoriel" : en fait, cela ne se produit que dans le cas très particulier ou l'un des espaces est inclus dans l'autre.*

17 Fonctions paires et impaires

Soit E un K-espace vectoriel. On considère $F = \mathcal{F}(K, E)$ le K-espace vectoriel des fonctions de K dans E. On définit $\Psi : F \to F$ pour tout $f \in F$ et $x \in K$ par
$$(\Psi(f))(x) = f(-x)$$

On définit enfin les ensembles des fonctions paires et impaires par
$$\mathcal{P} = \{f \in F, \forall x \in K, f(-x) = f(x)\}$$
$$\mathcal{I} = \{f \in F, \forall x \in K, f(-x) = -f(x)\}$$

1. Montrer que Ψ est linéaire de F dans F.

2. En déduire que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de F.
3. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires :

$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = F$$

18 ($\star$) Fonctions sinusoidales

On pose $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est libre dans E.
2. ($\star\star$) Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{x \mapsto A\cos(t + \varphi),\ A \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathbb{R}\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, dont la famille $(\cos, \sin)$ est une base.

19 Valeur moyenne d'une fonction

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. On définit

$$F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f = 0 \right\}$$

le sous espace de E des fonctions à moyenne nulle, et

$$G = \{f \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda\}$$

celui des constantes.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
3. Montrer que

$$E = F \oplus G$$

4. On note $p \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur sur G parallèlement à F. Calculer p pour les fonctions suivantes

$$x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto x^n \qquad x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2\pi}\right) \qquad x \mapsto \cos^2\left(\frac{x}{2\pi}\right)$$

20 ($\star$) Matrices symétriques et antisymétriques

Pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$, on définit la matrice A^t, appelée transposée de A, par $A^t = (a_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$. On pose

$$\mathcal{S} = \left\{M \in \mathcal{M}_n(K),\, M^t = M\right\}$$

appelé ensemble des matrices symétriques, et

$$\mathcal{A} = \left\{M \in \mathcal{M}_n(K),\, M^t = -M\right\}$$

appelé ensemble des matrices anti-symétriques.

1. Vérifier que l'application $A \mapsto A^t$ est linéaire.
2. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, on a
$$(AB)^t = B^t A^t \qquad\qquad (A^t)^t = A$$
3. Montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(K)$.
4. Montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(K)$
$$\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{I}$$
5. ($\star\star$) Donner une base de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{I}$ et calculer leur dimension.

21 Une construction des nombres complexes

On considère $\mathbb{C}$ vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$$

Et on définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{C} &\longrightarrow C \\ a+ib &\longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Montrer que $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En déduire la dimension de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que C est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
3. Vérifier que φ est une application $\mathbb{R}$-linéaire. Déterminer son noyau et son image. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ sur C.

4. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, montrer que l'application $u(z) : s \in \mathbb{C} \mapsto zs \in \mathbb{C}$ est linéaire. Montrer que
$$\mathrm{mat}_{(1,i)}(u(z)) = \varphi(z)$$
5. Vérifier que
$$\varphi(1) = I_2 \qquad \varphi(i)^2 = -I_2$$
6. Vérifier que pour tous complexes $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a
$$\varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2)$$
7. En déduire que pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

Remarque 21.1. *Vu que l'ensemble C a la même structure que $\mathbb{C}$ (vis-a-vis de la somme, du produit, et de la multiplication par un scalaire réel), cela nous fournit retrospectivement une "construction" des nombres complexes $\mathbb{C}$.*

22 $(\star)$ Quaternions

On définit
$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$
Appelé ensemble des quaternions. On pose
$$1_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad i_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$
$$j_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad k_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
On définit enfin
$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{I} : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & z = a + ib & \longmapsto & a.1_{\mathbb{H}} + b.i_{\mathbb{H}} \end{array}$$

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 dont $(1_{\mathbb{H}}, i_{\mathbb{H}}, j_{\mathbb{H}}, k_{\mathbb{H}})$ est une base. Est-ce un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?
2. Montrer que le produit de deux quaternions est encore un quaternion.

3. Montrer que l'on a les relations
$$i_{\mathbb{H}}^2 = j_{\mathbb{H}}^2 = k_{\mathbb{H}}^2 = i_{\mathbb{H}}.j_{\mathbb{H}}.k_{\mathbb{H}} = -1_{\mathbb{H}}$$
4. Montrer que tout quaternion non nul admet une inverse qui est un quaternion.
5. Montrer que $\mathcal{I}$ est un morphisme de $\mathbb{R}$-linéaire injectif de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{H}$. Et pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$$\mathcal{I}(z_1 z_2) = \mathcal{I}(z_1)\mathcal{I}(z_2)$$

Remarque 22.1. *En identifiant $\mathcal{I}(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}$, on peut considérer $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, mais il faut faire attention au fait que l'on a $\mathcal{I}(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}.I_2$. Cette identification rétablit le fait que $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

Remarque 22.2. *L'ensemble $\mathbb{H}$ est appelé corps des quaternions. On le note $\mathbb{H}$ en hommage à Hammilton. Lorsqu'il en eut l'idée, il raconte avoir gravé les relations de la question 4 avec un couteau dans une pierre du pont de Brougham (maintenant appelé Broom Bridge) à Dublin. Aujourd'hui, à défaut de pouvoir y lire l'inscription originale, on peut trouver une plaque commémorative. (voir https ://youtu.be/SZXHoWwBcDc)*

23 ($\star$) Équation différentielle homogène

On considère $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables à valeurs dans $\mathbb{C}$. Sur E, on définit l'opérateur de dérivation
$$\begin{aligned} D : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

1. Vérifier que D est une application linéaire.
2. Quel est le noyau de D ? Quel est son image ?
3. Quel est le noyau de D^2 ? Celui de D^n $(n \geq 1)$?
4. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, vérifier que $\epsilon_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ est dans $\ker(D - \lambda \operatorname{Id}_E)$.
5. Si $f \in E$, montrer que
$$D(f\epsilon_{-\lambda}) = (D(f) - \lambda.f)\epsilon_{-\lambda}$$
6. Si $f \in \ker(D - \lambda \operatorname{Id}_E)$, vérifier que $f\epsilon_{-\lambda} \in \ker D$. En déduire que $\ker(D - \lambda \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Vect}(\epsilon_\lambda)$. En déduire l'ensemble des solutions dans E de l'équation différentielle homogène
$$y' - \lambda y = 0$$

7. ($\star\star$) Si $f \in \ker(D - \lambda \operatorname{Id}_E)^n$, vérifier que $f\epsilon_{-\lambda} \in \ker D^n$. En déduire que $\ker(D - \lambda \operatorname{Id}_E)^n = \operatorname{Vect}(x \mapsto x^k e^{\lambda x})_{0 \leq k \leq n}$. En déduire l'ensemble des solutions dans E de l'équation différentielle homogène

$$y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0$$

8. Décrire l'ensemble des solutions dans E de l'équation différentielle homogène

$$y^{(3)} = y$$

9. Décrire l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle homogène

$$y^{(3)} = y$$