Mathématiques Générales 1
Type 1

Institut Villebon - Georges Charpak

Année 2017 - 2018

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. Le sujet est composé de trois exercices indépendants. Au sein d'un exercice, il est possible d'admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite. Un barême est donné à titre indicatif.

1 Diagonalisation d'un projecteur (5 points)

On définit dans $\mathbb{R}^3$ les deux ensembles

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\right\}$$

et

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x=y=z\right\}$$

1. Justifier que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont leurs dimensions ?
2. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = E \oplus F$$
3. On considère l'application linéaire $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par
$$p(x,y,z) = \frac{1}{3} \cdot (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$$
   (a) Écrire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
   (b) Calculer p^2. En déduire un polynôme annulateur de p de degré 2. En déduire que p est diagonalisable.
   (c) Déterminer les valeurs propres de p et les espaces propres associés.

2 Un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (9 points)

Dans tout cet exercice, on pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 2. On pose $A \in E$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et on considère l'endomorphisme $f : E \to E$ défini pour toute matrice $M \in E$ par

$$f(M) = AM$$

On se propose de montrer que l'endomorphisme f a les mêmes valeurs propres que A et de déterminer les espaces propres associés.

1. Ecrire la matrice de l'application f dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de E :
$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les espaces propres associés. En déduire des matrices $P, D \in E$ avec D diagonale et P inversible telles que
$$A = PDP^{-1}$$

3. (a) Montrer que pour tout $k \geq 0$, et $M \in E$, on a

$$f^k(M) = A^k M$$

où f^k désigne l'endomorphisme f composé k fois avec lui-même (avec la convention $g^0 = \mathrm{Id}_E$).

(b) En déduire que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, et $M \in E$, on a

$$Q(f)(M) = Q(A)\, M$$

(c) Vérifier que $\chi_A(A) = 0$ où χ_A désigne le polynôme caractéristique de A.

(d) En déduire que

$$\chi_A(f) = 0$$

puis que f est diagonalisable et que ses valeurs propres sont parmi celles de A.

4. Soit $M \in E$, on note $M_1, M_2 \in \mathbb{C}^2$ ses colonnes

$$M = \big(M_1 | M_2\big)$$

Montrer l'équivalence

$$M \in \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow M_1, M_2 \in \ker(A - \lambda \cdot I_2)$$

En déduire les espaces propres de f.

3 Un endomorphisme en dimension infinie (7 points)

On considère l'endomorphisme $\varphi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, défini pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi(f)(x) = f'(x) + 2x f(x)$$

1. Montrer que φ n'est pas injective et déterminer son noyau.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que λ est une valeur propre de φ et déterminer $\ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})})$.
3. ($\star$) Montrer que φ est surjective.
   Indication : On pourra utiliser que pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'équation différentielle $y' + 2xy = g$ admet des solutions (qu'on ne demande pas de calculer).
4. On considère maintenant la restriction ψ de l'application φ au sous-espace vectoriel des polynômes, c'est-à-dire l'application $\psi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ définie pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ par

$$\psi(P) = \varphi(P)$$

et de même, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\psi_n : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_{n+1}[X]$ par $\psi_n(P) = \varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

(a) Écrire la matrice de l'application $\psi_2 : \mathbb{C}_2[X] \to \mathbb{C}_3[X]$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{C}_2[X]$ et $\mathbb{C}_3[X]$ (qu'on ordonnera par degré croissant).

(b) Montrer que ψ est injective.

(c) Montrer que ψ n'admet aucune valeur propre.

(d) ($\star$) l'application ψ est-elle surjective ?
Indication : On pourra considérer $\deg \psi(P)$, et montrer que le polynôme constant 1 n'est pas dans l'image de ψ