Mathématiques Générales 1

Devoir maison 1

Institut Villebon-Charpak

Année 2017 - 2018

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par

$$A = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

1 Méthode matricielle

1. Déterminer les valeurs prorpes de A. Ce résultat suffit-il à assurer que A est diagonalisable ?
2. Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé. Les vecteurs seront choisis de troisième composante égale à 1.
3. En déduire une matrice R réelle et inversible telle que

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4. Calculer R^{-1} (le détails des calculs figurera sur la copie).

2 Méthode vectorielle

Rappelons que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

1. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}[X], +, .)$. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire sa dimension.
2. P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$, nous lui associons la fonction P^* définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, \; P^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,dt \\ P^*(0) = P(0) \end{cases}$$
Démontrer que P^* est un polynôme de de degré inférieur ou égal à 2.
Nous définissons alors une application φ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même en posant :
$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto P^*$$
3. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Calculer la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ (les polynômes de $\mathcal{B}$ seront rangés par ordre de degré croissant).
5. Notons
$$f_0 : x \mapsto (x-1)^2 \qquad f_1 : x \mapsto (x-1)(x+1) \qquad f_2 : x \mapsto (x+1)^2$$
Montrer que $\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$, en notant (c_0, c_1, c_2) ses composantes dans la base $\mathcal{F}$, exprimer c_0, c_1 et c_2 en fonction de $P(-1)$, $P(1)$ et $P'(1)$, dérivée de P en 1.
6. Calculer $\varphi(f_0)$, $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ et donner l'expression de ces fonctions polynômes dans la base $\mathcal{B}$.
Donner ensuite l'expression de
$$\varphi(f_0), \varphi(f_1), \varphi(f_2)$$

dans la base $\mathcal{F}$ puis écrire la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{F}$.

7. Ecrire la relation matricielle entre M' et M et retrouver le résultat de la question 3 de la partie 1.

3 Application à l'étude de trois suites numériques

Considérons trois suite réelles u, v, w définie sur $\mathbb{N}$ qui vérifient les relations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \frac{7\,u_n - 2\,v_n + w_n}{12} \\ v_{n+1} & = & \frac{-\,u_n + 2\,v_n - w_n}{3} \\ w_{n+1} & = & \frac{u_n - 2\,v_n + 7\,w_n}{12} \end{array}\right.$$

1. Ecrire un algorithme qui calcule, pour un entier naturel n donné, les valeurs de u_n, v_n et w_n.

2. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer pour tout entier naturel n, une expression de A^n (on pensera à utiliser la réduction de la matrice A).

   En déduire pour tout entier naturel n, une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n et des réels u_0, v_0, w_0.

4. Les suites u, v, w sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leur limite respective.