Analyse 2

Feuille d'exercices 3 : Séries de Fourier

Institut Villebon - Georges Charpak

Année 2017 - 2018

1 Calculs de coefficicients de Fourier

1.1 Linéarisation

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$f(t) = \cos^3(t)$$

1. Dessiner le graphe de la fonction f. Quelle est la régularité de f ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

   Indication : On pourra remplacement le cosinus par son expression en fonction de l'exponentielle complexe et développer.

1.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin x + |\sin x|}{2}$$

1. Dessiner le graphe de la fonction f. Quelle est la régularité de f ? Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

1.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire, telle que pour $t \in [0, \pi]$,

$$f(t) = t(\pi - t)$$

1. Dessiner le graphe de la fonction f. Quelle est la régularité de f ? Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f. En déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$
On pourrait penser qu'il existe une formule similaire pour $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$*, mais à ce jour, aucune formule de la sorte n'est connue !*
3. Appliquer le théorème de Parseval et montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$
et en déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

1.4 $(\star)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{e^{ix}}$$

1. Quelle est la régularité de f ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$(n+1)c_{n+1}(f) = c_n(f)$$
3. On admet que $c_0(f) = 1$. En déduire que pour tout $n \geq 0$
$$c_n(f) = \frac{1}{n!}$$

et que pour tout $n < 0$

$$c_n(f) = 0$$

4. Dans cette question on propose une autre façon de calculer les coefficients $c_n(f)$.
   (a) Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$$

   Indication : On pourra utiliser que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$

   (b) Montrer que la série de fonctions $x \mapsto \frac{e^{inx}}{n!}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$c_n(f) = \frac{1}{n!}$$

   et que pour $n < 0$, $c_n(f) = 0$.

5. Appliquer le théorème de Parseval, et déduire que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos t}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

1.5 ($\star\star$) La fonction ζ aux entiers pairs

Pour $s > 1$ un réel, on définit la fonction ζ (appelée fonction ζ de Riemman) par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

On a vu, au fil des exercices que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

1. En vous inspirant de la méthode utilisée dans ces exercices, calculer $\zeta(8)$. En déduire

$$\zeta(8) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^8}{9450}$$

Indication : On pourra chercher une fonction f dont les coefficients de Fourier "sont en" $\frac{1}{n^4}$ et appliquer le théorème de Parseval.

2. Comment ferait-on pour calculer $\zeta(10)$?

   La découverte de ces formules est due à Euler. D'autres mathématiciens avant lui avaient cherché une formule pour $\zeta(2)$ en vain. Non content de juste donner une formule pour $\zeta(2)$, celui-ci trouva dans la foulée une formule analogue pour tous les entiers pairs sous la forme

$$\zeta(2n) = \frac{A_n}{B_n}\pi^n$$

   où les nombres $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$ sont des entiers. Sa méthode ne faisait pas appel aux séries de Fourier mais se basait plutôt sur des manipulations (peu rigoureuse à l'époque) de sommes et produits infinis.