Analyse 2

Feuille d'exercices 2 : Séries de Fourier

Institut Villebon - Georges Charpak

Année 2017 - 2018

1 Calculs de coefficicients de Fourier

1.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$.

1. Dessiner le graphe de la fonction f. Quelle est la régularité de f ? Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f. En déduire que

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

1.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Dessiner le graphe de la fonction f. Quelle est la régularité de f ? Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi} + 1\right) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\pi\frac{\operatorname{ch}\pi}{\operatorname{sh}\pi} + 1\right)$$

1.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = |\cos x|$$

1. Dessiner le graphe de la fonction f. Quelle est la régularité de f ? Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}$$

1.4 (⋆) Équation différentielle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. On se donne $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et on considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' - \alpha y = f$$

1. On suppose que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une solution 2π-périodique de (E).
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

   $$(in-\alpha)c_n(y) = c_n(f)$$

   (b) En déduire qu'il existe une unique solution périodique donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par

   $$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n(f)}{in-\alpha} e^{int}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction impaire 2π-périodique telle que pour tout $0 < x \leq \pi$,

   $$f(t) = \frac{\pi - t}{2}$$

   Déterminer la solution périodique de l'équation différentielle (E).

2 Autour des théorèmes du cours

2.1 ($\star$) Inégalité de Bessel

Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ des fonctions continues par morceaux 2π-périodiques, on définit

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

Et on pose $\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle}$ (appelée la norme 2 de f). Pour $n \geq 0$, on note $S_n(f)$ la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f, c'est-à-dire la fonction $S_n(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$$

1. Montrer que
$$\|S_n(f)\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_n(f)(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$$
Ce résultat peut être vu comme l'égalité de Parseval dans le cas d'une somme finie de termes.

2. Montrer que $\langle S_n(f)|f - S_n(f)\rangle = 0$ et que
$$\|f\|^2 = \|S_n(f)\|^2 + \|f - S_n(f)\|^2$$

3. En déduire l'inégalité de Bessel
$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

On peut interpréter ce résultat géométriquement : $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f dans l'espace des polynômes trigonométrique de degré $\leq n$, et l'inégalité de Bessel affirme que la norme de ce projeté est plus petite que la norme de f.

La preuve de l'égalité de Parseval utilise l'inégalité de Bessel. En effet, la majoration

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2$$

assure que la série des $|c_k|^2$ est convergente. Et pour prouver que la somme vaut $\|f\|^2$, il faut montrer que $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|^2 = 0$.

2.2 ($\star$) Noyaux de Dirichlet

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction (appelée $n^{\text{ème}}$ noyau de Dirichlet) définie sur $\mathbb{R}$ par

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{inx}$$

1. Justifier que D_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique. Dessiner les graphes de D_0, D_1, D_2 et D_3.
2. Montrer que si $x = 2k\pi$, alors
$$D_n(x) = 2n + 1$$
et pour $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas un multiple entier de 2π, on a
$$D_n(x) = e^{-inx}\frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin\left((n + 1/2)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
Indication : On pourra faire apparaitre la somme des termes d'une suite géométrique.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable et 2π-périodique. On note $S_n(f)$ somme partielle de rang n de la série de Fourier de f, c'est-à-dire la fonction $S_n(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$$
Montrer que
$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x - t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x - u)D_n(u)\,du$$

Le résultat de la dernière question montre que $S_n(f)$ est le produit de convolution de la fonction f avec le noyau $n^{ème}$ de Dirichlet. Cette observation est un argument clé dans la preuve du théorème de Dirichlet.

2.3 ($\star$) Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction $\mathcal{C}^2$

Dans cet exercice on donne une preuve du théorème de convergence normale dans le cas particulier ou la fonction est $\mathcal{C}^2$. On suppose que l'on connait le théorème de Dirichlet (mais évidemment pas le théorème de convergence normale).

Soit f une fonction localement intégrable 2π-périodique.

1. On suppose que f est $\mathcal{C}^1$, montrer que

$$c_n(f') = inc_n(f)$$

2. En déduire que pour tout $n \neq 0$

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f'')|}{n^2} \leq \frac{M}{n^2}$$

   avec $M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)|dt$

3. Montrer que la série de fonctions $c_0 + \sum_{n\geq 1}(c_{-n}(f)e^{-int} + c_n(f)e^{int})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.