Nom : ....

Le sujet est constitué d'un exercice et d'un QCM. Pour le QCM, il est demandé de cocher ***toutes les propositions*** *de réponse correctes à une question, sachant qu'****il peut y en avoir zéro, une ou plusieurs*** *par question. Il est demandé de remplir le QCM directement sur votre feuille et de le rendre avec votre copie. Pensez à mettre votre nom sur le sujet ! Un barême est donné à titre indicatif.*

1 Exercice (15 points)

Soit $\alpha > 0$ un réel strictement positif qu'on suppose non entier ($\alpha \notin \mathbb{Z}$). On définit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, on a

$$f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$$

La fonction étant prolongée ailleurs par périodicité.

1. Dessiner le graphe de la fonction f_α entre -2π et 2π (pour le dessin, on prendra $\alpha = \frac{1}{2}$ comme valeur du paramètre). Quelle est la régularité de la fonction f_α ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f_α.
3. Étudier la convergence de la série de Fourier de f_α. En déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} - \frac{1}{\alpha}\right)$$
4. En déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{\pi - 2}{4}$$
et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{9n^2 - 1} = \frac{2\sqrt{3}\pi - 9}{18}$$
Indication : On pourra considérer la relation précédente pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{3}$.
5. Montrer que
$$\cot \alpha\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\right) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\alpha\pi + n\pi} + \frac{1}{\alpha\pi - n\pi}\right)$$

où $\cot = \frac{\cos}{\sin}$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas un multiple entier de π, on a

$$\cot x = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x - n\pi}$$

6. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha^2 - n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\alpha^2 \sin^2 \alpha\pi} + \frac{\pi}{4\alpha^3} \cot \alpha\pi - \frac{1}{2\alpha^4}$$

En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(9n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{27} + \frac{\pi}{12\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$$

2 QCM (6 points)

Questions	**Réponses**
Que vaut $\cos(13287942405394\pi)$?	☐ 0 ☐ 1 ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{2}$
Quel est l'argument de $1+e^{i\frac{8\pi}{3}}$?	☐ $\frac{4\pi}{3}$ ☐ $-\frac{4\pi}{3}$ ☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ $-\frac{\pi}{3}$
Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est 2π-périodique et que $g(x)=f(2x)$, alors	☐ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $c_{2n}(f)=c_n(g)$ ☐ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f)=c_{2n}(g)$ ☐ g est π-périodique ☐ g est 4π-périodique
Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est 2π-périodique, alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$	☐ $c_n\left(\overline{f}\right)=c_{-n}(f)$ ☐ $c_n\left(\overline{f}\right)=\overline{c_{-n}(f)}$ ☐ $c_n(-f)=c_{-n}(f)$ ☐ $c_n\left(\frac{1}{f}\right)=\frac{1}{c_n(f)}$
Si $f(t)=\sin(2t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, alors	☐ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n(f)=0$. ☐ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f)=0$. ☐ pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}$, $a_n(f)=0$. ☐ pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{2\}$, $b_n(f)=0$.
Si $g(t)=\cos^3 t$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, alors	☐ $a_0(g)=\frac{1}{8}$ ☐ $a_1(g)=\frac{3}{8}$ ☐ $a_2(g)=\frac{3}{8}$ ☐ $a_3(g)=\frac{1}{8}$