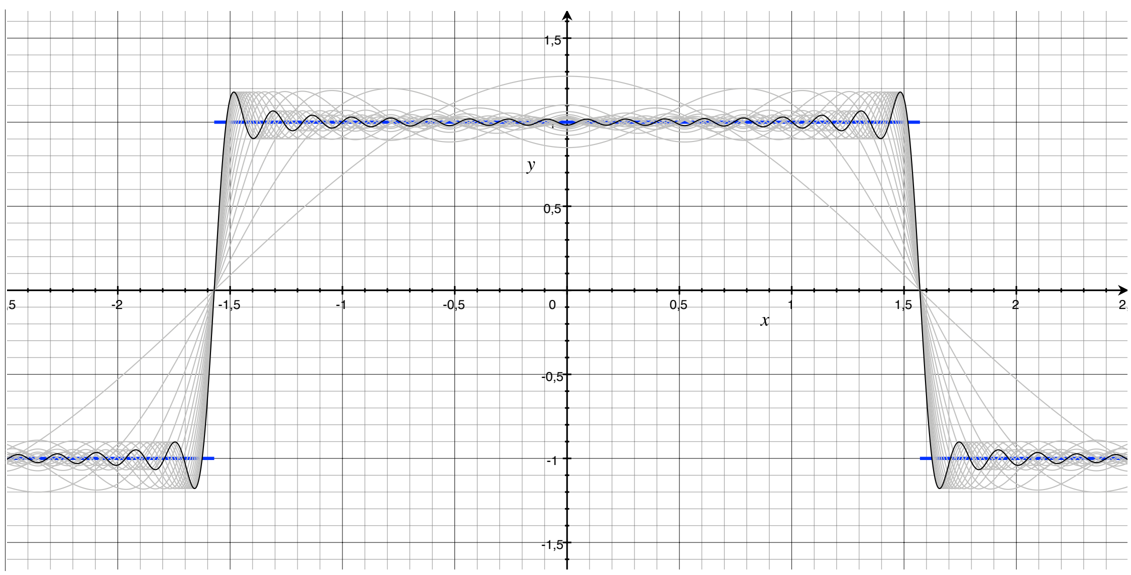
Analyse 2 :

Séries de Fourier

Institut Villebon - Georges Charpak

Année 2017 - 2018



1 Introduction

1.1 But

Nous souhaitons décomposer un signal périodique comme une "superposition d'harmoniques".

Mathématiquement, cela signifie que l'on cherche à écrire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et T-périodique comme une somme (potentiellement infinie) de sinusoïdes. En posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (appelée pulsation), cela revient à écrire f sous la forme

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \frac{a_0}{2} + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \underbrace{(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))}_{\text{harmonique de rang } n}$$

ou, en notation complexes

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t}$$

1.2 Questions

Cela soulève des questions qui seront le fil directeur du cours :

1. **À quelle condition une fonction f peut-elle s'écrire sous cette forme ?**

   Précisément, la question est de savoir quelles sont les conditions de régularité sur f pour qu'il existe une telle expression. Une première remarque qu'on peut déjà faire est que f doit nécessairement être T-périodique (en tant que somme de fonctions T-périodiques). Il est bien moins évident d'avoir l'intuition de l'ensemble des fonctions qui vont pouvoir s'écrire sous cette forme. Des réponses à cette question seront apportées notamment par les théorèmes de Dirichlet et Parseval (qui sont postérieurs aux travaux de Fourier, qui ne s'était pas trop soucié du problème de la convergence).

2. **Étant donné f, comment calculer les coefficients ?**

   Nous allons voir qu'il existe une formule intégrale pour ce qu'on appelle les coefficients de Fourier de f.

3. **Comment la série trigonométrique $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t}$ s'approche de f quand N grandit ?**

   Précisément la question revient à savoir en quel sens la séries de Fourier $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t}$ converge vers f. On trouve que plus la fonction f est régulière, plus la suite de coefficients c_n tend vite vers 0 (ce qui implique que la série de Fourier s'approche vite de f). Et vice versa, plus la suite de coefficients c_n tend vite vers 0, plus la fonction f est régulière.

1.3 Un calcul "à la physicienne"

Donnons une intuition d'où vient la formule pour les coefficients c_n ($n \in \mathbb{Z}$). Admettons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s'écrive

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

Sans se soucier de question de convergence ou de rigueur analytique, calculons formellement l'intégrale suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}e^{-in\omega t}\,dt\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i(k-n)\omega t}\,dt\end{aligned}$$

admettons un instant qu'on puisse intervertir les symboles d'intégrale et somme infinie, on aurait alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-in\omega t}\,dt &\stackrel{?}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T c_k e^{ik\omega t}e^{-in\omega t}\,dt\\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \underbrace{\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{i(k-n)\omega t}\,dt\right)}_{0 \text{ si } k\neq n}\\ &= c_n \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T 1\,dt}_{1}\\ &= c_n\end{aligned}$$

Tout cela n'est certes pas encore rigoureux, mais nous avons désormais un "candidat" de formule pour les coefficients c_n (il reste à vérifier que ça marche). Cela nous amène à la définition qui suit.

2 Coefficients de Fourier et Séries de Fourier

Dans toute la suite du cours, on dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est localement intégrable si elle est absolument intégrable sur tout segment, c'est-à-dire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est bien définie.

Définition : Coefficients de Fourier ♡

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et localement intégrable.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit les coefficients de Fourier exponentiels (ou complexes) de f par

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les coefficients de Fourier trigonométriques (ou réels) de f par

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\, dt, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\, dt$$

Le cas 2π-périodique

En particulier, pour les fonctions 2π-périodiques (le cas le plus courant), on a $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, donc les formules sont

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

et

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$$

ces formules sont à connaître par coeur sur le bout des doigts !

2.1 Harmoniques et série de Fourier associée à f

Définition : Série de Fourier associée à f

Pour $n \geq 1$, on appelle harmonique de rang n associée à f la fonction $H_n(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H_n(f)(x) = c_n(f)e^{in\omega x} + c_{-n}(f)e^{-in\omega x} = a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)$$

L'harmonique de rang 0 est la fonction constante $h_0 = c_0 = \frac{a_0}{2}$.

La série de Fourier associée à f est la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} H_n(f)$.

La somme partielle de rang n de la série de Fourier associée à f est la fonction $S_n(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ik\omega x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x))$$

Remarquons que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est à valeur réelles, l'harmonique de rang n peut se réécrire comme une seule sinusoïde avec un déphasage. En effet, écrivons le coefficient $c_n(f)$ sous forme géométrique

$$c_n(f) = \rho_n e^{i\varphi_n}$$

Comme f est à valeurs réelles, on a $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)} = \rho_n e^{-i\varphi_n}$ pour tout $n \geq 0$. Et donc l'harmonique de rang $n \geq 1$ s'écrit

$$H_n(f)(x) = \rho_n e^{i(n\omega x+\varphi_n)} + \rho_n e^{-i(n\omega x+\varphi_n)} = 2\rho_n \cos(n\omega x + \varphi_n)$$

Dans les sections suivantes, nous faisons plusieurs remarques importantes sur les coefficients de Fourier d'une fonction.

2.2 Coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique

Si la fonction f est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire comme une somme finie

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega x}$$

alors le calcul fait en section 1.3 est légal (puisqu'on intervertit une somme finie et une intégrale), donc les coefficients de Fourier sont effectivement les coefficients qui apparaissent dans l'écriture de f, ou en d'autres termes $c_k(f) = c_k$ pour tout $-n \leq k \leq n$ (comme la notation le suggérait), et $c_k(f) = 0$ pour les autres valeurs de k.

2.3 Intégrale sur une période

Une première remarque qui peut s'avérer très utile pour le calcul des coefficients de Fourier est que l'intégrale peut se calculer sur n'importe quel intervalle de longueur 2π (on dit qu'on calcule l'intégrale sur une période). Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

et de même

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t)\, dt, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t)\, dt$$

En effet, cela est justifié par le résultat suivant :

Lemme 2.1. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction T-périodique et localement intégrable. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^{a+T} g(t)dt = \int_0^T g(t)dt$$

ou en d'autres termes, l'intégrale de g sur une période ne dépend pas des bornes choisies.

Démonstration. Par la rélation de Chasles on a

$$\int_a^{a+T} g(t)dt = \int_a^0 g(t)dt + \int_0^T g(t)dt + \int_T^{T+a} g(t)dt = -\int_0^a g(t)dt + \int_0^T g(t)dt + \int_T^{T+a} g(t)dt$$

et comme g est T-périodique, alors $\int_T^{T+a} g(t)dt = \int_0^a g(t)dt$, et donc il reste

$$\int_a^{a+T} g(t)dt = \int_0^T g(t)dt$$

□

En appliquant ce lemme avec les fonctions périodiques $t \mapsto f(t)\, e^{-int}$, $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ et $t \mapsto f(t)\sin(nt)$, on retrouve les relations ci-dessus pour les coefficients de Fourier.

2.4 Coefficients complexes ou réels ?

On peut passer des coefficients réels aux coefficients complexes et vice versa. En effet, comme $e^{-in\omega t} = \cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)$ et $e^{in\omega t} = \cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)$, on a que pour $n \geq 0$,

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, \qquad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$$

Dans l'autre sens, comme $2\cos(n\omega t) = e^{-in\omega t} + e^{in\omega t}$ et $2\sin(t) = i(e^{-in\omega t} - e^{in\omega t})$, on a pour $n \geq 0$ les relations

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \qquad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Il n'est donc nécessaire de calculer que les coefficients complexes, ou que les coefficients réels. Selon le contexte, il peut être plus pratique de calculer l'un ou l'autre.

Les coefficients complexes ont l'avantage de ne demander de calculer qu'une seule intégrale (et il est souvent plus simple commode d'intégrer des exponentielles que des sinus et cosinus).

2.5 Coefficients d'une fonction à valeurs réelles

Si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est à valeur réelles, alors les coefficients trigonométriques prennent tous des valeurs réelles (puisque les intégrandes $f(t)\cos(nt)$ et $f(t)\sin(nt)$ sont réels).

$$a_n(f) \in \mathbb{R}, \qquad b_n(f) \in \mathbb{R}$$

Et sur les coefficients complexes, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la relation

$$c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

2.6 Coefficients et parité

Les coefficients trigonométriques se révèlent particulièrement pratiques si la fonction est paire ou impaire. En effet, on a les propriétés suivantes.

Parité et coefficients de Fourier

Si f est paire :

Alors pour tout $n \in Z$,

$$c_{-n}(f) = c_n(f)$$

et pour tout $n \geq 1$ et $k \geq 0$,

$$b_n(f) = 0, \qquad a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(kt)\,dt$$

Si f est impaire :

Alors pour tout $n \in Z$,

$$c_{-n}(f) = -c_n(f)$$

et pour tout $n \geq 0$ et $k \geq 1$,

$$a_n(f) = 0, \qquad b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(kt)\,dt$$

Donc au final, si la fonction est paire ou impaire, on a uniquement besoin de calculer que l'une de deux familles de coefficients parmi $(a_n(f))_{n\geq 0}$ ou $(b_n(f))_{n\geq 1}$, et on peut se contenter d'intégrer sur la moitié de la période.

Exemple 2.2 (Signal carré)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction 2π-périodique, paire, telle que*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq t < \pi/2 \\ 0 & si\ t = \pi/2 \\ -1 & si\ \pi/2 < t \leq \pi \end{cases}$$

Calculons les coefficients trigonométriques de f, les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls, et

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt)\,dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt)\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nt)\,dt\right) \\ &= \frac{4}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & si\ n = 2k \\ \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} & si\ n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

2.7 Coefficients de Fourier de f'

Supposons que f est $\mathcal{C}^1$, alors une intégration par partie nous donne la relation

$$c_n(f') = in\, c_n(f)$$

En particulier, pour $n \neq 0$, on a

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f')|}{n}$$

Moralement, les coefficients de f vont converger plus vite vers 0 que ceux de f' (ainsi, plus une fonction sera régulière, plus ses coefficients de Fourier devraient converger vite vers 0).

2.8 Une interpretation géométrique

À titre culturel, mentionnons qu'on peut donner une interpretation géométrique des coefficients de Fourier qui fait appel au cours sur les espaces Euclidiens. Si on définit le produit scalaire/hermitien suivant sur les fonctions T-périodiques

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

alors les fonctions $t \mapsto e^{in\omega t}$ forment une famille orthonormée au sens où

$$\left\langle e^{in\omega t}|e^{im\omega t}\right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on peut voir le coefficient de Fourier $c_n(f)$ comme le produit scalaire de f avec la fonction $t \mapsto e^{in\omega t}$:

$$c_n(f) = \left\langle f|e^{in\omega t}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\, dt$$

Et enfin la somme partielle de la série de Fourier s'écrit

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \left\langle f|e^{in\omega t}\right\rangle \cdot e^{in\omega t}$$

ce qui correspond au projeté orthogonal de f sur l'espace vectoriel engendré par les $(t \mapsto e^{ik\omega t})_{-n\leq k\leq n}$ (l'espace des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$). Ou en d'autre termes, $S_n(f)$ est le polynôme trigonométrique de degré $\leq n$ qui est le plus proche de f au sens de la distance induite par le produit scalaire.

3 Convergence des séries de Fourier

Dans la suite, on dit qu'une fonction f est continue par morceaux si sur tout segment, elle est continue sauf en un nombre fini de points de discontinuités, et qu'aux points de discontinuité, f admet des limites finies à gauche et à droite [1] (on dit alors que la discontinuité est de première espèce). On donne dans cette partie des résultats de convergence des séries de Fourier du plus faible au plus fort.

3.1 Convergence en norme quadratique

Théorème de Parseval

Soit f une fonction $\mathcal{C}^0$ par morceaux, 2π-périodique, alors les sommes partielles $S_n(f)$ convergent en moyenne quadratique vers f, c'est-à-dire qu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |S_n(f)(t)-f(t)|^2\,dt = 0$$

et de plus on a la formule de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt$$

Attention la convergence en moyenne quadratique est plus faible que la convergence simple ! Si f est seulement continue (ou seulement continue par morceaux), on ne peut rien affirmer sur la convergence ponctuelle de la suite $S_n(f)(t)$, il arrive que cette suite diverge pour certaines valeurs de t.

En pratique, c'est le plus souvent la deuxième partie du théorème qu'on utilise (la formule de Parseval). Donnons un exemple d'application courante.

Exemple 3.1 (Signal carré)**.** *On reprend la fonction "carrée" qu'on a défini dans l'exemple 2.2. La fonction f est continue par morceaux, donc d'après le théorème de Parseval, on a la formule*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt$$

d'après le calcul des coefficients qu'on a fait, on trouve alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8}{\pi^2(2k+1)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = 1$$

1. Ce qui exclut donc les fonctions où la limite à droite ou à gauche est infinie comme $t\mapsto 1/t$ en 0^+ et 0^-, ou pire, les cas où la limite n'existe pas comme $t\mapsto \sin(1/t)$ en 0^+ et 0^-.

On en déduit l'égalité

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

3.2 Convergence simple

Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux (pas nécessairement continue), T-périodique, alors les sommes partielles $S_n(f)$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $t \mapsto \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$. C'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_n(f)\, e^{in\omega t} = \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)] = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$$

Exemple 3.2 (Signal carré)**.** *On reprend la fonction "carrée" qu'on a défini dans l'exemple 2.2. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet, les sommes partielles $S_n(f)$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $t \mapsto \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t)$ (voir la figure 1 pour une illustration graphique). C'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cos((2k+1)t)$$

En particulier, en $t = 0$, on obtient

$$f(0) = 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)}$$

D'où on tire la formule

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)}$$

Signalons au passage que si $[a,b]$ est un segment qui contient une discontinuité de f, on sait par l'absurde que l'on n'a pas convergence uniforme/normale sur l'intervalle $[a,b]$, en effet, si on avait convergence normale, comme les harmoniques sont continue, la somme devrait aussi être continue, ce qui n'est pas le cas. On en déduit que la convergence autour des discontinuités ne peut pas être uniforme/normale (et en effet on peut voir graphiquement sur la figure 1 des "défauts" aux bords d'une discontinuité : la série de Fourier s'approche lentement de f).

3.3 Convergence normale

Théorème de convergence normale

Soit f une fonction **continue** et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, T-périodique, alors la série de fonctions $H_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

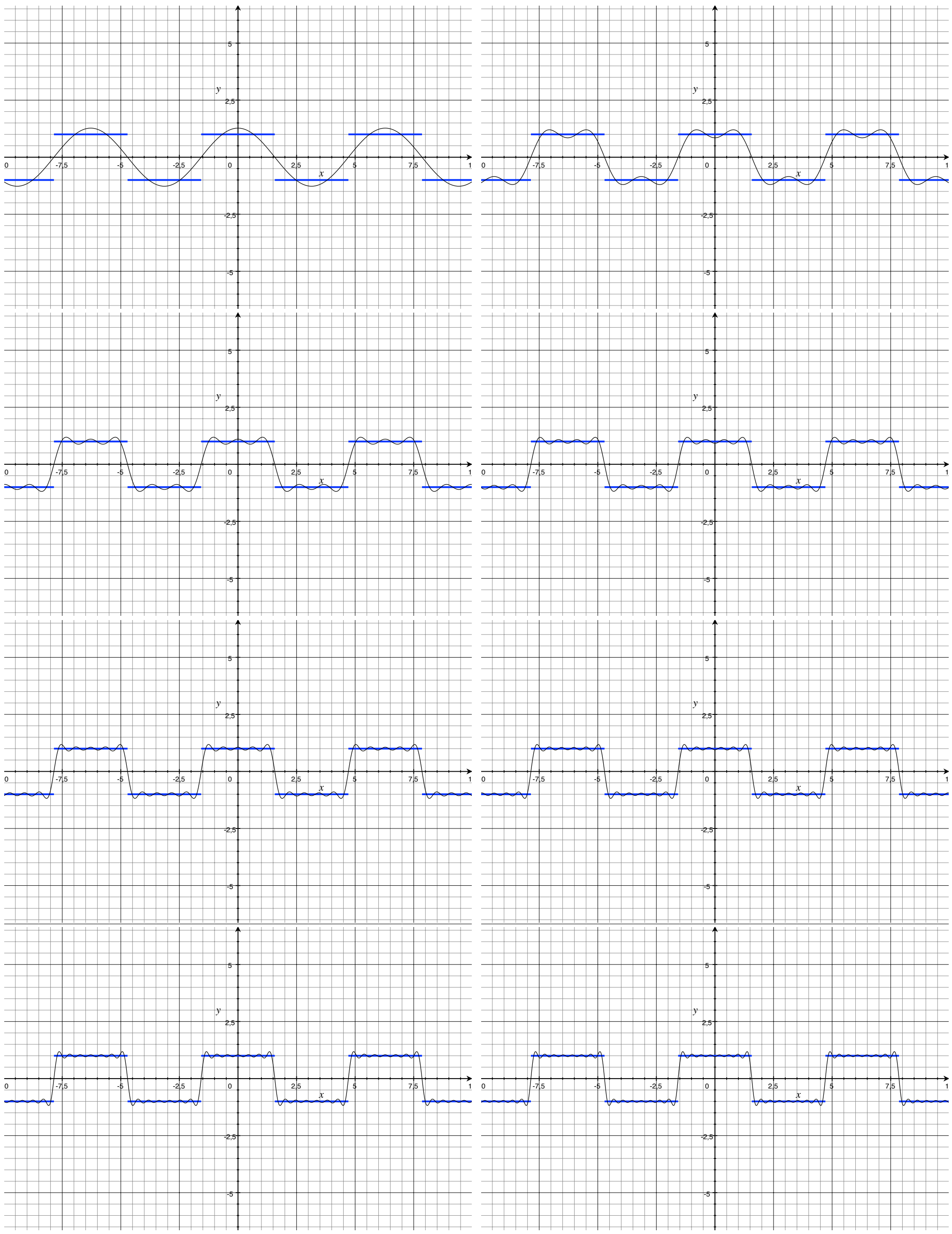


FIGURE 1 – La fonction “carrée” f en bleu, et en noir les graphes termes successifs de la suite des sommes partielles de la séries de Fourier de f. On voit que la courbe noire s’approche de la bleue (mais la convergence est moins rapide près des points de discontinuité, c’est le phénomène de Gibbs).